






**UNIVERSIDAD
DEL QUINDÍO**

**Unidad 1 - E.A.1
GRADIENTE ARITMÉTICO Y GEOMÉTRICO**

Autor
Berly Román Valencia

PERTINENTE CREATIVA INTEGRADORA

 @uniquindio  unquindioconectada  unquindioconectada

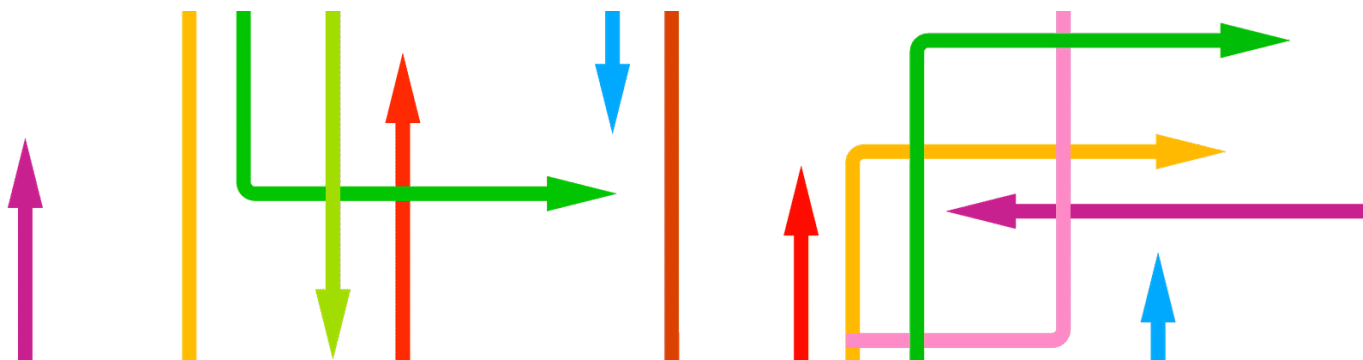
Gradiente Aritmético y Geométrico



- ≡ **Competencias**
- ≡ **Ruta Metodológica**
- ≡ **Introducción a la Temática**
- ≡ **Desarrollo de la Temática**
- ≡ **Resumen de la Temática**
- ≡ **Glosario**
- ≡ **Referencias**



- Argumenta la aplicación de las teorías que permiten comprender el concepto de gradiente, para resolver situaciones problemáticas que involucran sus diferentes tipos.
- Elabora las representaciones gráficas del gradiente aritmético y geométrico, a partir del análisis de ejercicios propuestos.
- Interpreta y comunica los diferentes conceptos y herramientas asociadas a la matemática financiera, en contextos económicos propios de la empresa, que facilitan sus relaciones financieras con sus clientes y proveedores.



Recomendaciones Generales:

Apreciado estudiante, recordemos las siguientes recomendaciones generales que le servirán para el adecuado proceso del espacio de aprendizaje:

i Nota: Este recurso es interactivo y por lo tanto deberás dirigirte a la plataforma para su correcto desarrollo.



- En primer lugar, es de suma importancia organizar el tiempo, para lo cual le recomiendo elaborar un cronograma teniendo en cuenta las fechas de cada espacio de aprendizaje.
- Recuerde que no está solo en el proceso de formación, la ventaja de la virtualidad es el trabajo colaborativo entre estudiantes y profesor.
- Prográmese para asistir puntualmente a los encuentros sincrónicos y revise los requerimientos para participar en ellos.
- Recuerde que las matemáticas no se aprenden solo leyendo u observando, porque se debe practicar y realizar varios ejercicios para adquirir la habilidad.
- No olvide el trabajo en equipo, el cual es una herramienta que facilita el aprendizaje.
- Descargue las lecturas y actividades que se proponen guardando siempre una copia.
- La concentración es la organización disciplinada de la atención, con el fin de proyectar y cumplir con metas y tareas.
- Las actividades propuestas por el profesor se deben realizar, ya que de su realización depende su mejor comprensión del contenido.
- La comunicación constante con su profesor es indispensable, pues será el punto de apoyo más importante en su proceso de aprendizaje.

Requisitos:

Ambientación



Según Meza (2017):

En economías inflacionarias los créditos favorecen a los deudores, porque están en la posibilidad de liquidar sus deudas con dinero más barato, razón por la cual los acreedores no recuperan totalmente el dinero prestado. Por esta razón el prestamista necesita recuperar el dinero dado en préstamo. De otro lado los usuarios de los créditos a largo plazo, por su limitada disponibilidad de dinero, también necesitan contar con sistemas de amortización de créditos que inicien con cuotas bajas que incrementan en la medida que incrementan sus ingresos (p.373).

Un sistema de amortización que puede ser utilizado para lograr lo dicho por Meza (2017) es el gradiente; pues es un método donde la cuota, anualidad o pago tiene la característica de variar a medida que pasa el tiempo pactado, es decir, es un procedimiento de pago a intervalo igual de tiempo, pero con unas cuotas que incrementan o disminuyen según el tiempo estipulado; este incremento es diferente a la tasa de interés negociada. En el sistema financiero suele ser usado en el crédito de vivienda pactado en UVR.

En este espacio de aprendizaje se estudiará el gradiente aritmético y geométrico, en la figura 1 se puede observar el desarrollo de la temática:



Figura 1: Clases de gradientes



Fuente: Álvarez, 2019



Gradiente aritmético:

Para el gradiente aritmético, según Morales 2012:

La ley de formación indica que cada pago es igual al anterior, más una constante; la cual puede ser positiva en cuyo caso las cuotas son crecientes, negativa lo cual genera cuotas decrecientes. En el caso de que la constante sea cero, los pagos son uniformes, es decir se tiene el caso de una anualidad. (p.28).

Lo anterior indica que cada pago cambia, en la medida en que transcurre el tiempo acordado (ley de formación). Esta variación puede aumentar (+) o disminuir (-), teniendo en cuenta que la cantidad que aumenta o disminuye **es en pesos (\$)**.

Para ejemplificar un gradiente aritmético, los invito a estudiar el siguiente video:

Video 2. Gradiente aritmético en Excel

González, J (2011). Gradiente aritmético en Excel. Recuperado el 10/05/2019 en <https://www.youtube.com/watch?v=dbhR-gySgIM>

[VER VIDEO](#)



Gradiente aritmético creciente:

Para Castrillón (2010), "el gradiente aritmético es aquel que se incrementa periodo tras periodo en una cantidad fija llamada g a partir de la primera cuota" (p.127)

Con lo anterior se deduce que, la característica principal del gradiente aritmético creciente es el incremento de una cantidad fija ($\$$), diferente a la tasa de interés, dicha cantidad se aplica durante el tiempo pactado.

Según Morales (2012):

Considerando que los pagos en cada periodo serán diferentes, entonces estos se identificarán con un subíndice que indica el consecutivo del pago. De acuerdo con la ley de formación, en este caso, cada pago será igual al anterior más una constante. (p.28).

A continuación, en la figura 2 se mostrará la secuencia para la ley de formación.

Figura 2: Ley de formación

A1 Primer pago
A2 = A1 +k Segundo pago
A3 = A2 +k = A1 + 2k Tercer pago

Fuente: Morales,2012

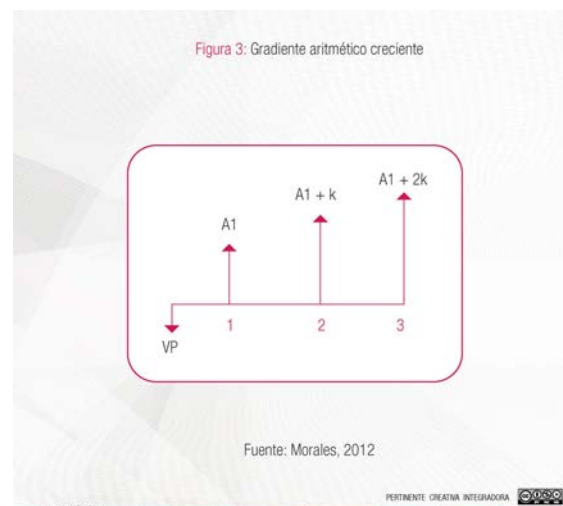
Conviene agregar, según lo muestra la figura 2, que siempre existirá un primer pago (A_1) y en el segundo pago (A_2) se adicionará la constante(k) en términos de pesos ($\$$), y así de forma sucesiva demostrando que cada pago variará en la medida que transcurre el tiempo pactado.

A continuación, se desarrollarán los conceptos del valor presente y futuro de un gradiente aritmético creciente.

Valor presente de un gradiente aritmético creciente

El valor presente de un gradiente aritmético creciente, es el valor hoy de una serie de pagos que se incrementa en una cantidad fija, según el tiempo y el periodo de pago.

Para Morales (2012) "la deducción del modelo matemático se considera una operación en la cual un préstamo se paga en una serie de Para Morales (2012), la deducción del modelo matemático se considera una operación en la cual un préstamo se paga en una serie de cuotas formada a través de un gradiente aritmético, a una tasa de interés efectiva por periodo "(p.325). La situación se muestra en la figura 3:



Para realizar el cálculo debemos utilizar la siguiente fórmula presentada en la figura 4:

Fórmula para el cálculo del valor presente de un gradiente aritmético creciente

$$V_p = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] + \frac{K}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \quad (1)$$

Fuente: Morales, 2012



Fuente: UDV (2019)

Ejemplo:

Mafi tiene una deuda que está cancelando con 6 cuotas mensuales, que aumentan cada mes en \$5.000. El valor de la primera cuota es de \$100.000. Si la tasa de interés pactada es del 36% NACM. Calcular el valor inicial de la deuda.

$$Vp = ?$$

$$A = \$100.000$$

$$\text{Tasa} = 36\% \text{ NACM}$$

$$\text{Tiempo} = 6 \text{ meses}$$

$$K = \$ 5.000$$

Aplicando la fórmula (1):

Tasa = 36% NACM



Recuerda que esta tasa es nominal y antes de aplicarla se debe dividir entre los periodos de capitalización que en este caso son 12:

$$\frac{36\%}{12} = 3\%$$

$$Vp = \$100.000 \left(\frac{(1 - (1 + 0,03)^{-6})}{0,03} \right) + \frac{\$ 5.000}{0,03} \left[\frac{(1 - (1 + 0,03)^{-6})}{0,03} - \frac{6}{(1 + 0,03)^6} \right]$$

$$Vp = \$100.000 (5,4172) + \$166.666,6666 [5,4172 - 5,0249]$$

$$Vp = \$100.000 (5,4172) + \$166.666,6667 [0,3923]$$

$$Vp = \$541.720 + \$65.383,3333$$

$$Vp = \$ 607.103,3333$$

R/ El valor inicial de la deuda es: \$ 607.103,3333

Si desean realizar ampliación de esta temática puede consultar el siguiente libro en la página de secuencia 390 y los ejercicios de las páginas de secuencia 435 y 436

Lectura. Matemáticas financieras aplicadas (pag. 390)

Jesús, J. (2017). Matemáticas financieras aplicadas. (6a. ed.) Ecoe Ediciones. Tomado de <https://login.crai.referencistas.com/login?url=https://www.ebooks7-24.com?il=5721&pg=390>

LEER

Valor futuro de un gradiente aritmético creciente

En este caso se determina el valor futuro equivalente de las cuotas depositadas, a una tasa de interés y un intervalo de tiempo pactados, más el incremento de una cantidad fija.

Para hallar el valor futuro (Vf), basta remplazar el valor presente (P) del gradiente, fórmula (2), de la figura 4:

Fórmula para el cálculo del valor futuro de un gradiente aritmético creciente.

$$V_f = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + \frac{K}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right] \quad (2)$$

Fuente: Morales, 2012

A continuación, se realizará el siguiente ejercicio de aplicación utilizando la fórmula (2).



Fuente: Fotolia (2019)

Si **Mafi** desea realizar una inversión ¿Qué valor recibirá si realiza un ahorro anual que inicia con un valor de **\$ 1.000.000** anuales e incrementa en **\$100.000** cada año, durante **10** años? Tenga en cuenta que el banco donde se realiza el ahorro reconoce una tasa de interés del **5.5%** anual.

Vf = ¿?

A = \$ 1.000.000

K = \$100.000 cada año

n = 10 años

En este caso la tasa de interés sólo se divide entre 100, ya que es una tasa anual y los otros datos como: el gradiente (k) y el tiempo (n) están anuales:

$$\frac{5.5\%}{100} = 0.055$$

$$Vf = \$1.000.000 \left(\frac{(1 + 0,055)^{10} - 1}{0,055} \right) + \frac{\$ 100.000}{0,055} \left[\frac{(1 + 0,055)^{10} - 1}{0,055} - 10 \right]$$

$$Vf = \$1000.000 (12,8753) + \$1.818.181,818 [(12,8753) - 10]$$

$$Vf = \$ 12.875.300 + \$1.818.181,818 [(12,8753) - 10]$$

$$Vf = \$ 12.875.300 + \$1.818.181,818 [2,8753]$$

$$Vf = \$ 12.875.300 + \$5.195.090,909$$

$$Vf = \$18.070.390,91$$

R/ El valor futuro del ahorro es de \$18.070.390,91

Gradiente aritmético decreciente

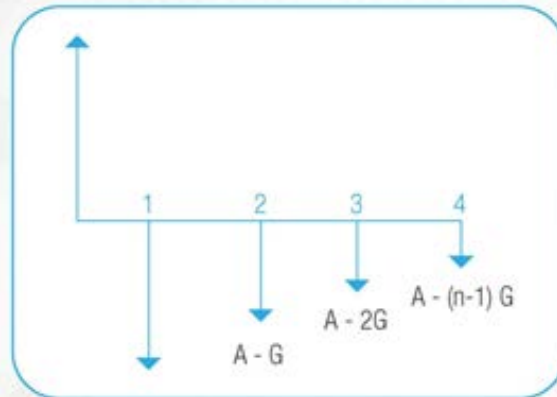
El gradiente aritmético decreciente implica reducciones de la cuota en la medida en la que transcurre el periodo de tiempo pactado del crédito.

Valor presente de un gradiente aritmético decreciente

De acuerdo con Meza (2017), "es un valor ubicado en el presente equivalente a una serie de pagos periódicos que tienen la característica de disminuir, cada uno respecto al anterior en una cantidad constante de dinero". (p.391).

En este sentido, en la figura 5 se muestra el flujo de caja de un gradiente aritmético decreciente:

Figura 5: Flujo de caja, gradiente aritmético decreciente



Fuente: Morales, 2012

PERTINENTE CREATIVA INTEGRADORA

www.unipalermo.edu.ar

El anterior planteamiento se puede aplicar en el siguiente ejemplo:

Fórmula para el cálculo del valor presente de un gradiente aritmético decreciente

$$Vp = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] - \frac{k}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right]$$

Si Mafi quiere cancelar su crédito en 6 cuotas mensuales, que disminuyan cada mes en \$5.000. El valor de la primera cuota es de \$100.000. Si la tasa de interés pactada es del 36%NACM. Calcular el valor inicial de la deuda.

Vp = ¿?

A = \$100.000

Tasa = 36% NACM

Tiempo = 6 meses

Aplicando la fórmula (1):

Tasa = 36% NACM



Recuerda que esta tasa es nominal y antes de aplicarla se debe dividir entre los periodos de capitalización que en este caso son 12:

$$\frac{36\%}{12} = 3\%$$

$$Vp = \$100.000 \left(\frac{1 - (1 + 0,03)^{-6}}{0,03} \right) - \frac{\$ 5.000}{0,03} \left[\frac{1 - (1 + 0,03)^{-6}}{0,03} - \frac{6}{(1 + 0,03)^6} \right]$$

$$Vp = \$100.000 - \$166.666,6666 [5,4172] - 5,0249]$$

$$Vp = \$100.000 (5,4172) - \$166.666,6667 [0,3923]$$

$$Vp = \$541.720 - \$65.383,3333$$

$$Vp = \$ 476.336,6667$$

R/ El valor inicial de la deuda es de \$ 476.336,6667

Si desean realizar ampliación de esta temática puede consultar el siguiente libro en la página de secuencia 391 y los ejercicios de las páginas de secuencia 435 y 436.

Lectura. Matemáticas Financieras aplicadas (pag. 391)

Jesús, J. (2017). Matemáticas financieras aplicadas. (6a. ed.) Ecoe Ediciones. Tomado de <https://login.crai.referencistas.com/login?url=https://www.ebooks7-24.com?il=5721&pg=391>

LEER

Gradiente geométrico

Para Morales (2012):

En el gradiente geométrico la ley de formación indica que cada pago es igual al anterior, multiplicado por una constante $(1+G)$; si G es positiva el gradiente será con cuotas crecientes, si G es negativo el gradiente será decreciente y si G es igual a 0, los

De acuerdo con Meza (2017), "se llama gradiente geométrico a una serie de pagos periódicos tales que cada uno es igual al anterior disminuido o aumentado en un **porcentaje** fijo". (p.298)

En este sentido, el gradiente geométrico tiene un crecimiento exponencial, el cual es diferente a la tasa de interés pactada.

Video. Gradiente geométrico en Excel

González, J (2011). Gradiente geométrico en Excel. Recuperado el 10/05/2019 en <https://www.youtube.com/watch?v=ZJSFeu63ISO>

LEER

De acuerdo con Morales (2012), de acuerdo con la ley de formación, cada pago será igual al anterior multiplicado por una constante, así como se muestra a continuación en la figura 6.

Figura 6: Ley de formación gradiente geométrico

A1 Primer pago
$A_2 = A_1 (1 + G)$ Segundo pago
$A_3 = A_2 (1 + G) = A_1 (1 + G)^2$ Tercer pago

Fuente: Morales, 2012

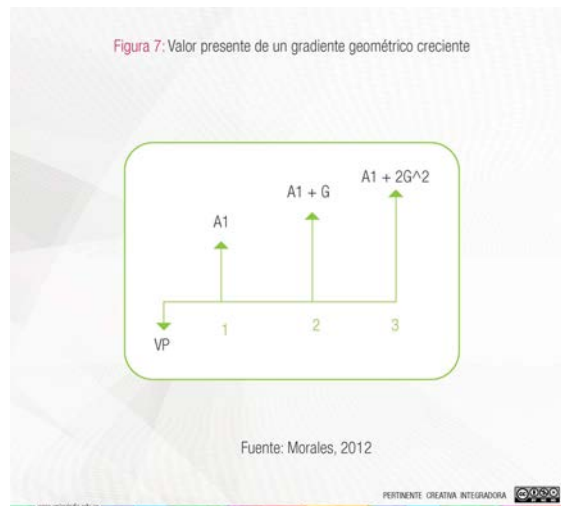
Gradiente geométrico creciente

En el gradiente geométrico creciente los pagos incrementan en cada periodo, la diferencia con los gradientes aritméticos crecientes, es que en los geométricos la variación es un incremento **porcentual** constante. Por ejemplo: en el gradiente aritmético el crecimiento es de \$50.000, en el geométrico del 10%.

Valor presente de un gradiente geométrico creciente

Según Mesa 2017, "el valor presente de un gradiente geométrico creciente es un valor ubicado en el presente, equivalente a una serie de pagos periódicos que aumentan cada uno, con respecto al anterior, en un porcentaje fijo" (p.398).

La operación se ilustra en la figura 7:



De la figura anterior, se muestra que para calcular el valor presente del gradiente geométrico se debe tener en cuenta dos escenarios:

Escenario 1 cuando la tasa de interés es diferente a la gradiente.

Escenario 2 cuando la tasa de interés es igual al gradiente.

En la figura 8 se incluye las fórmulas o ecuaciones utilizadas en cada caso descrito:

Figura 8: Ecuaciones para calcular el valor presente de un gradiente geométrico

$$V_p \left| \begin{aligned} &= \frac{A}{(G - i)} \left[\frac{(1 + G)^n}{(1 + i)^n} - 1 \right] \text{ si } G \\ &\neq i \\ &= \frac{nA}{(1 + i)} \text{ si } G = i \end{aligned} \right.$$

Fuente: Morales, 2012

Para una mejor ilustración y aplicación de las ecuaciones anteriores de este tema se desarrollará el siguiente ejemplo:

Mafi desea adquirir una vivienda, debe dar un valor de **\$30.000.000** de cuota inicial, y cancelar el saldo disponible en **180** cuotas por valor de **\$850.000** que incrementan cada mes en un **5%** y cobra una tasa de interés del **0.85%** mensual. Calcular el valor de la obligación.

$$CI = \$30.000.000$$

$$A = \$850.000$$

$$n = 180 \text{ cuotas mensuales } G =$$

$$5\%$$

$$i = 0,85\% \text{ mensual}$$

En el caso del ejercicio se debe tener en cuenta que la G es diferente de i, se aplica la siguiente ecuación

$$Vp = \frac{A}{(G - i)} \left[\frac{(1 + G)^n}{(1 + i)^n} - 1 \right]$$

$$Vp = \frac{\$850.000}{(0,05 - 0,0085)} \left[\frac{(1 + 0,05)^{180}}{(1 + 0,0085)^{180}} - 1 \right]$$

$$Vp = \$20.481.927,71 \left[\frac{6.517,3918}{4,5884} - 1 \right]$$

$$Vp = \$20.481.927,71 * 1.419,4062$$

$$Vp = \$29.072.095.766$$

Si desean realizar ampliación de esta temática puede consultar el siguiente libro en la página de secuencia 412 y los ejercicios de las páginas de secuencia 435 y 436.

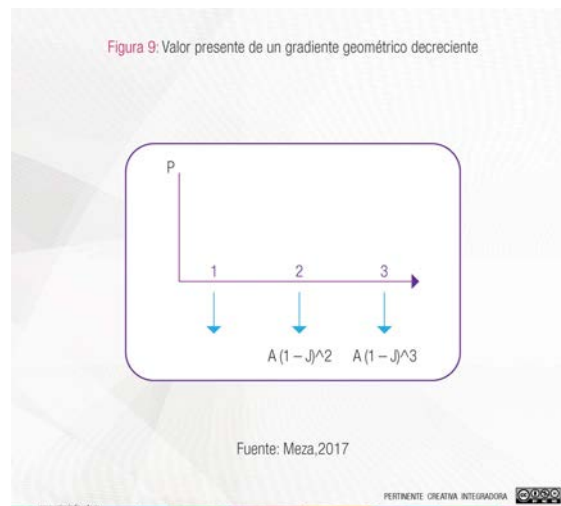
Lectura. Matemáticas financieras aplicadas (pag. 412)

Jesús, J. (2017). Matemáticas financieras aplicadas. (6a. ed.) Ecoe Ediciones. Tomado de <https://login.crai.referencistas.com/login?url=https://www.ebooks7-24.com?il=5721&pg=412>

LEER

Gradiente geométrico decreciente

Según Meza, 2017, "lo constituyen una serie de pagos o ingresos que disminuyen periódicamente en un porcentaje constante" (p.404). En la figura 9 se ilustra la serie de pago decreciente:



Valor presente de un gradiente geométrico decreciente

De acuerdo con Meza, 2017 "el valor presente de un gradiente geométrico decreciente es un valor, ubicado un período anterior a la fecha del primer pago, equivalente a una serie de pagos o ingresos que disminuyen periódicamente en un porcentaje fijo J " (p.404). Donde:

P = Valor presente

J = tasa de incremento de las cuotas

A = valor de la primera cuota

n = número de cuotas

i = tasa de interés de la operación

De acuerdo con lo anterior la siguiente expresión se observa en la ecuación de la figura 10.

Figura 10: Ecuación valor presente de un gradiente geométrico decreciente

$$P = A \left(\frac{(1+i)^n - (1-J)^n}{(J+i)(1+i)^n} \right)$$

Fuente: Meza, 2017

Para una mejor ilustración y aplicación de las ecuaciones anteriores de este tema se desarrollará el siguiente ejemplo:

Mafi desea conocer, cuál sería la diferencia con el crédito si la cantidad porcentual disminuye en un **5%**. Realice los cálculos con los datos del ejercicio anterior.

$$Vp = A * \frac{(1+i)^n - (1-J)^n}{(J+i) * (1+i)^n}$$

$$Vp = \$850.000 * \frac{(1 + 0,0085)^{180} - (1 - 0,05)^{180}}{(0,005 + 0.0085) * (1 + 0,0085)^{180}}$$

$$Vp = \$850.000 * \frac{4,5884 - 0,000097779}{0,00135 * 4,5884}$$

$$Vp = \$850.000 * 740,7249$$

$$Vp = \$629.616.212,2$$

Si desean realizar ampliación de esta temática puede consultar el siguiente libro en la página de secuencia 418 y los ejercicios de las páginas de secuencia.

Lectura. Matemáticas financieras aplicadas (pag. 418)

Jesús, J. (2017). Matemáticas financieras aplicadas. (6a. ed.) Ecoe Ediciones.

Tomado de <https://login.crai.referencistas.com/login?url=https://www.ebooks7-24.com?il=5721&pg=418>

LEER



ACTIVIDAD AUTÓNOMA

Apreciado estudiante, para la entrega o desarrollo de esta actividad diríjase al botón **“EVALUACIONES”** ubicado en la parte superior derecha del aula virtual, allí encontrará el enlace para el envío, respectivo.

PRESENCIA SERVICIO SERVICIO SERVICIO SERVICIO EVALUACIONES



ACTIVIDAD EVALUATIVA

Apreciado estudiante, para la entrega o desarrollo de esta actividad diríjase al botón **“EVALUACIONES”** ubicado en la parte superior derecha del aula virtual, allí encontrará el enlace para el envío, respectivo.

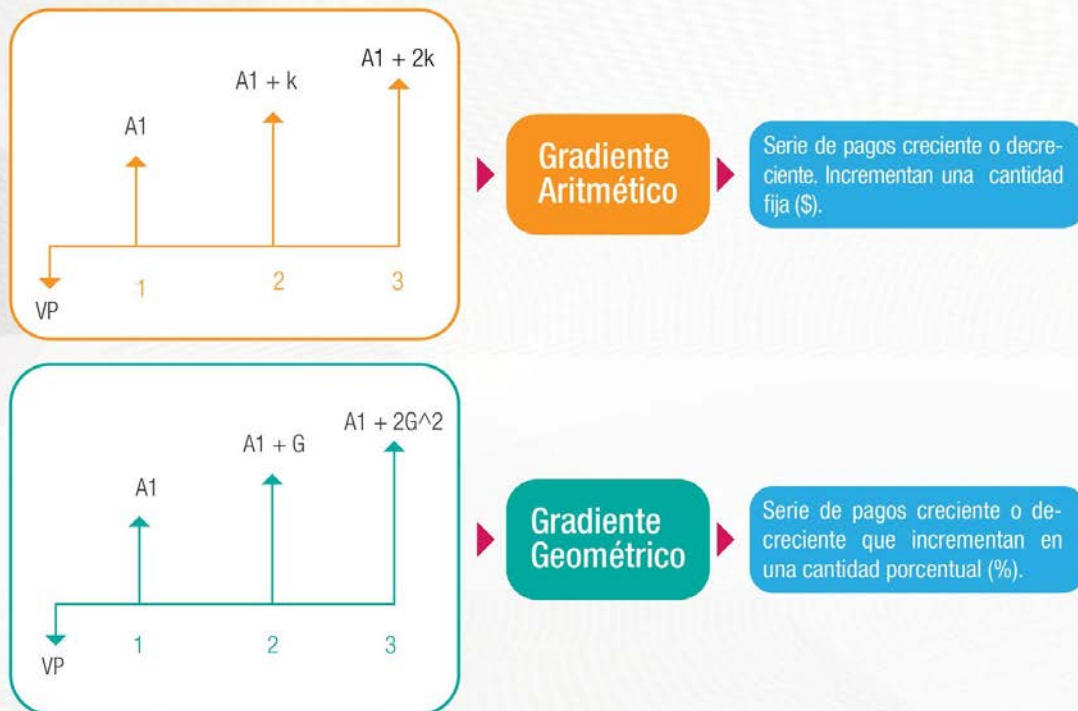
PRESENCIA SERVICIO SERVICIO SERVICIO SERVICIO EVALUACIONES

Video. ¿Qué son los Gradientes? - Unidad 1 - Criterios de Inversión

Virtualización UniQuindío (2019). ¿Qué son los Gradientes? - Unidad 1 - Criterios de Inversión. Recuperado el 8 de agosto de 2019 en <https://www.youtube.com/watch?v=kMwGa5OT50M&feature=youtu.be>

VER VIDEO

Figura 11: Resumen de la temática



Fuente: Román, 2019



- **Crédito:** Es el sistema mediante el cual una persona natural solicita un dinero prestado a entidades financieras legalmente constituidas.
- **Deudores:** De acuerdo con el sistema bancario son las personas naturales o jurídicas a quien se le otorga préstamos.
- **Anualidad:** Es la cantidad fija de dinero que se cancela durante un tiempo determinado.
- **Gradiente:** Serie de pago variables que crece o decrece en una cantidad (\$) o porcentaje fijo (%).
- **Valor presente:** Valor actual de una serie de pagos que crecen o decrecen.
- **Valor futuro:** Valor que se recibe al final de un periodo determinado y que es el resultado de una serie de pagos.
- **Tiempo de negociación:** Número de pagos pactados de una serie creciente o decreciente en igual periodo de tiempo.
- **Tasa de interés:** Porcentaje aplicado y diferente al porcentaje en cual incrementa el gradiente.
- **Interés:** Valor cancelado por el uso del dinero y el cual depende del capital invertido o la deuda pactada.





Castrillón, J (2013). Matemáticas Financieras. Barranquilla: Uninorte

González, J (2011). Gradiente aritmético en Excel. Recuperado el 10/05/2019 en <https://www.youtube.com/watch?v=dbhR-gySgIM>

González, J (2011). Gradiente aritmético en Excel. Recuperado el 10/05/2019 en <https://www.youtube.com/watch?v=ZJSFeu63ISo>

Jesús, J. (2017). Matemáticas financieras aplicadas. (6a. ed.) Ecoe Ediciones. Tomado de [http://crai.referencistas.com:2078/Meza, J. d. \(2017\). Matemáticas financieras aplicadas. Bogotá: Ecoe Ediciones](http://crai.referencistas.com:2078/Meza, J. d. (2017). Matemáticas financieras aplicadas. Bogotá: Ecoe Ediciones).

Meza, J. d. (2017). Matemáticas financieras aplicadas. Bogotá: Ecoe Ediciones.

Morales, C.M (2012). Finanzas del proyecto, introducción a la matemática financiera. Medellín: Esumer

otros, C. C. (2008). 300 casos resueltos de matemáticas financieras. Armenia: Kinesis Ltda.





UNIDAD DE VIRTUALIZACIÓN

unidaddevirtualizacion@uniquindio.edu.co

Tel: (57) 6 7 35 9300 Ext 400




Universidad del Quindío

Carrera 15 Calle 12 Norte

Bloque de Ciencias Básicas - Primer Piso

Armenia, Quindío - Colombia

PERTINENTE CREATIVA INTEGRADORA

 @uniquindio  uniquindioconectada  uniquindioconectada