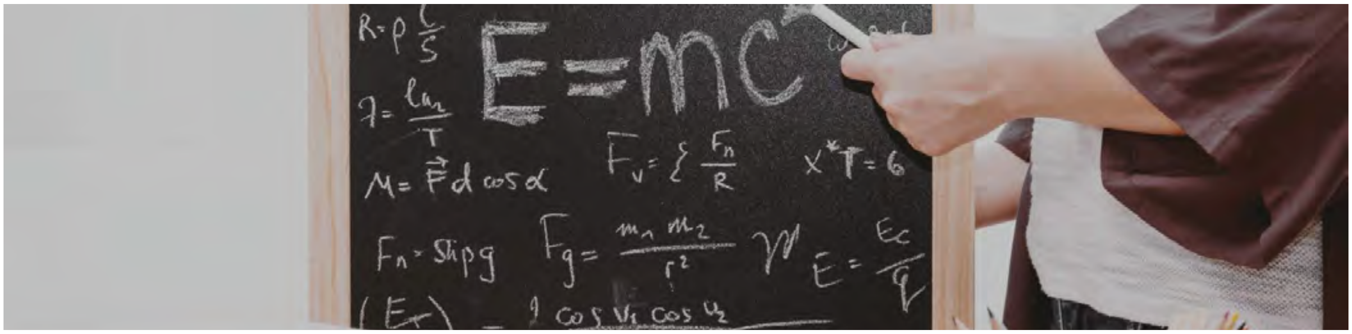
UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO

Unidad 4 - E.A. 1
APLICACIONES DE LA DERIVADA

Autor
Carlos Alberto Abello

Aplicaciones de la derivada

Competencias y Resultados de Aprendizaje



- Aplica las propiedades de la derivada en forma correcta para graficar una función.
- Utiliza la derivada para la construcción de gráficas y resolución de problemas de la vida cotidiana, a partir del pensamiento lógico.

Ruta Metodológica

Recomendaciones Generales

Antes de iniciar el estudio del espacio de aprendizaje, lea con atención las pautas a seguir, para comprender y apropiar mejor los temas.

- Realice una lectura pausada, si es necesario, lea varias veces y subraye las palabras que no entienda.
- En las actividades propuestas durante el espacio, le sugiero organizar un plan de trabajo, que le permita cumplir con éxito la programación.
- Siempre que considere conveniente realice un bosquejo auxiliar. Esto le ayudará a visualizar mejor el ejercicio.
- Tenga en cuenta las fechas establecidas en el cronograma de trabajo, para la entrega puntual de las actividades.
- Participe constantemente en las actividades y foros propuestos, esto le permitirá interactuar con su docente y compañeros.

Introducción a la Temática

Esta unidad, marca el final del trabajo que comenzamos con el análisis de una **relación** a través de los interceptos con los ejes, las simetrías, el dominio, el rango y las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas). Acá redondearemos este trabajo con otros elementos muy importantes como son:

- Puntos máximos y mínimos de una función o curva.
- Intervalos donde la función crece y decrece.
- Puntos de inflexión de la curva.
- Intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y hacia abajo.

Todos estos estudios sirven para determinar algunas propiedades cualitativas de las gráficas

En el trascurso del espacio de aprendizaje nos daremos cuenta de la importancia de la derivada, objeto del cálculo diferencial, para el análisis de gráficas y aplicaciones en la solución de problemas relacionados con casi todas las ciencias, por ejemplo, en ingeniería, física, economía, biología, estadística, etc., y la matemática misma.

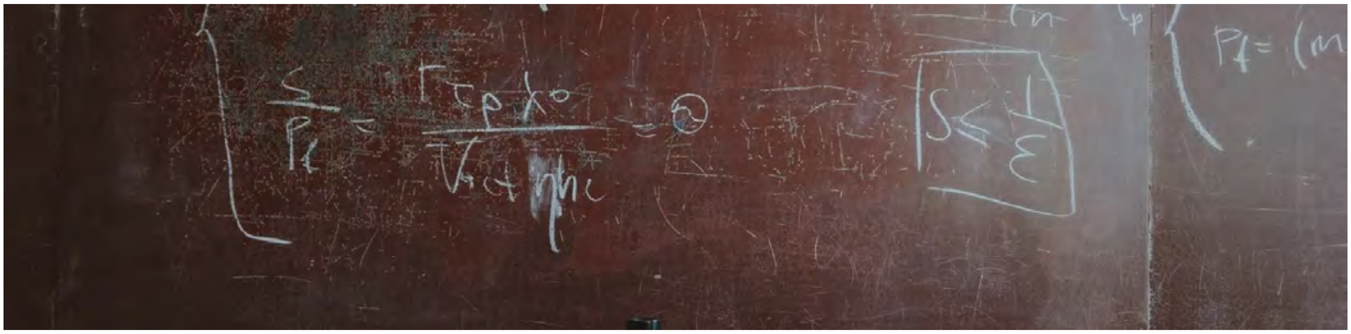
Estimado estudiante, para introducir los temas propios de este espacio de aprendizaje, lo invito a observar el siguiente video:

Video 1. Derivadas en la vida cotidiana

Villamar (2015). Derivadas en la vida cotidiana [Archivo de video]. Recuperado el 17/02/2020 en: https://www.youtube.com/watch?v=IUABwXkXS1I

VER VIDEO

Enseñanzas



Aplicaciones de la Derivada

La derivada es una herramienta necesaria para manejar modelos matemáticos, que resultan del planteamiento de problemas prácticos que se presentan en la vida cotidiana.

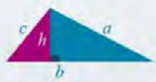
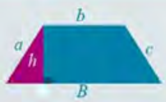
En esta unidad presentaremos algunas **otras aplicaciones importantes de la derivada, como problemas de razón de cambio y máximos y mínimos (optimización).** También trataremos el trazado más detallado de curvas, utilizando la derivada, para encontrar los extremos (máximos y mínimos), los intervalos donde crece y decrece, así como los intervalos donde presenta concavidades y cambios.

1 Razón de cambio

Hasta ahora hemos visto cómo usar la **regla de la cadena** para calcular $\frac{dy}{dx}$ implícitamente. Otra aplicación importante es el cálculo de **razones de cambio de** dos o más variables que **cambian con el tiempo.**

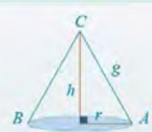
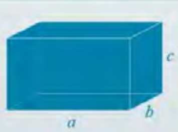
Algunos de los **problemas** que se van a resolver requieren del conocimiento de las fórmulas geométricas como son las áreas y volúmenes de regiones planas y solidos respectivamente. Por esta razón presentamos a continuación el cuadro resumen de las fórmulas más utilizadas

Tabla 01. Áreas y Perímetros de Regiones Planas

Figura		Convenciones	Area	Volumen
Rectangulo		a = *Altura* b = *Base*	$P = 2\,(a + b)$	$A = b \times a$
Cuadrado		l = *Lado*	$P = 4\,l$	$A = l^2$
Triangulo		a, b, c = *Lados* h = *Altura*	$P = a + b + c$	$A = \frac{b \times h}{2}$
Circulo		D = *Diametro* r = *Radio*	$P = \pi \cdot D$ $P = 2\pi\, r$	$A = \frac{\pi\, r^2}{2}$ $A = \frac{\pi\, D^2}{4}$
Trapecio		a, b, B, c = *Lados* B = *Base Mayor* b = *Base menor* h = *Altura*	$P = a + b + B + c$	$A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h$

Fuente: Abello (2020)

Tabla 02. Áreas y Volúmenes de Sólidos

Figura		Convenciones	Area	Volumen
Cilindro Circular Recto		h = *Altura* r = *Radio de la Base*	$A_L = 2\pi \cdot r \cdot h$ $A_T = 2\pi \cdot r\,(h + r)$	$V = \pi \cdot r \cdot h$
Cono Circular recto		g = *Generatriz* h = *Altura* r = *Radio de la Base*	$A = \pi \cdot r \cdot g$ $A_T = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$	$V = \frac{1}{3}\,\pi \cdot r^2 \cdot h$
Esfera		r = *Radio de la Esfera*	$A = 4\pi\ r^2$	$V = \frac{4}{3}\,\pi\ r^2$
Paralelepipedo		a = *Largo* b = *Ancho* c = *Altura*	$A_L = 2\,(a + b)\,c$ $A_T = 2\,(a + b)\,c + 2ab$	$V = a\,b\,c$

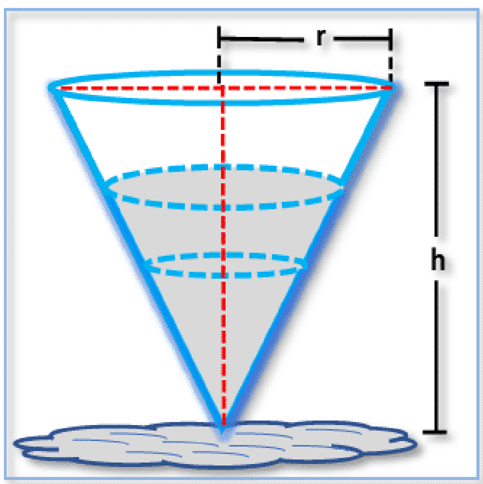
Fuente: Abello (2020)

Ahora con las fórmulas geométricas establecidas, consideremos un ejemplo de razón de cambio.

Cuandœl agua sale de un depósito cónico, el volumen V, el radio r y la altura h del nivel del agua son funciones del tiempo t. Sabiendo que estas variables están relacionadas por la ecuación

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

Figura 1. Depósito cónico



Fuente: Abello (2020)

Podemos derivar implícitamente respecto a t para obtener la ecuación **de razones relacionadas o razón de cambio.**

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi\left[2r\frac{dr}{dt} \cdot h + r^2 \cdot \frac{dh}{dt}\right]$$

En la cual vemos que la razón de cambio de ***V*** esta ligada a las de ***h*** y ***r***.

Observe:

$\frac{dV}{dt}$: Razon de cambio del volumen con respecto al tiempo

$\frac{dr}{dt}$: Razon de cambio del radio con respecto al tiempo

$\frac{dh}{dt}$: Razon de cambio de la altura del cono con respecto al tiempo

Este concepto lo vamos a observar en el siguiente ejemplo

Ejemplo

Si x y y son funciones derivables de $\boldsymbol{t}$ relacionadas por la ecuación $y = x^2 + 1$, hallar $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 1$, dado que

$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cuando } x = 1$$

- Por la **regla de la cadena**, podemos derivar en ambos lados de la ecuación con respecto a $\boldsymbol{t}$

$$y = x^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(x^2 + 1) = 2x\frac{dx}{dt}$$

ahora bien, cuando

$$x = 1 \quad y \quad \frac{dx}{dt} = 2 \text{ tenemos que}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2(1)(2) = 4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = 4$$

En este ejemplo observamos que se nos daba la siguiente información

- **Ecuación dada:** $y = x^2 + 1$
- **Calcular: Ritmo de cambio dado o variación**

$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cuando } x = 1$$

- **Calcular:**

$$\frac{dy}{dt} \text{ cuando } x = 1$$

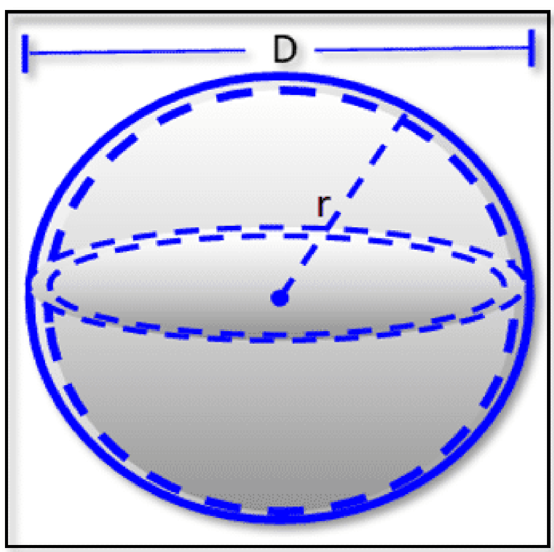
De acuerdo con Larson y Hostetler (1998), se sugiere un **método o proceso** para resolver problemas de razón o variación de cambio:

- Asignar símbolos o variables a todas las cantidades conocidas y a las cantidades a determinar.
- Escribir una ecuación que ligue a las variables cuyas **razones de cambio están dadas** o han de determinarse.
- Usando la regla de la cadena, derivar implícitamente ambos miembros de la ecuación respecto del tiempo .
- Sustituir en la ecuación resultante o sea en la ecuación de razón de cambio todos los valores conocidos de las variables y sus razones de cambio. Puede ser necesario a veces referirse a la ecuación original para hacer sustituciones correctas en la ecuación final.

Ejemplo

Una bola de nieve se funde de tal modo que el **área superficial** disminuye a razón de 1 cm^2/s, calcule la rapidez a la cual disminuye el diámetro cuando este es de 10 cm

Figura 2. Bola de nieve esférica



Fuente: Abello (2020)

- Construimos **una figura** que sea una interpretación del problema
- Definimos las **variables** a utilizar:
  Sea $\mathbf{A}$: el área de la bola esférica en un momento de tiempo t

$\mathbf{D}$: diámetro de la bola esférica en un momento de tiempo dado
Hallemos **una ecuación que ligue** las dos variables, que en este caso es el **área superficial** de una bola esférica de radio r, definido por

$$\mathbf{A} = 4\pi r^2 \quad (1)$$

Donde debemos expresar el radio de la esfera en términos del diámetro $\mathbf{D}$. Para ello tenemos que $\mathbf{D} = 2r$, entonces despejando r

$$r = \frac{\mathbf{D}}{2}$$

y sustituyendo en (1), se tiene

$$\mathbf{A} = 4\pi\left(\frac{\mathbf{D}}{2}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{\mathbf{D}^2}{4} = \pi D^2$$

$$\mathbf{A} = \pi \mathbf{D}^2 \quad (2)$$

Ritmos de cambio (o variación) dado:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -1\frac{cm^2}{s} \text{ se toma negativo porque disminuye}$$

- **Calcular**:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad \text{cuando } \mathbf{D} = 10\ cm$$

- Ahora aplicando la **regla de la cadena**, podemos derivar implícitamente en ambos lados de (2) con respecto a $\boldsymbol{t}$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi\mathbf{D}^2) = 2\pi\mathbf{D}\frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad \text{ecuación de razon de cambio}$$

Despejando

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} \text{ se tiene : } \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}/dt}{2\pi\mathbf{D}} \quad (3)$$

Esta última ecuación es una **fórmula general** que relaciona las dos derivadas $d\mathbf{D}/dt$ y $d\mathbf{A}/dt$

- Finalmente, cuando $\mathbf{D} = 10\ cm$ y $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -1\ cm^2/s$ en (3), se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{-1\ cm^2/s}{2\pi\ (10\ cm)} = \frac{-1\ cm^2/s}{20\pi\ cm} = -\frac{1}{20\pi}cm/s$$

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = -\frac{1}{20\pi}cm/s$$

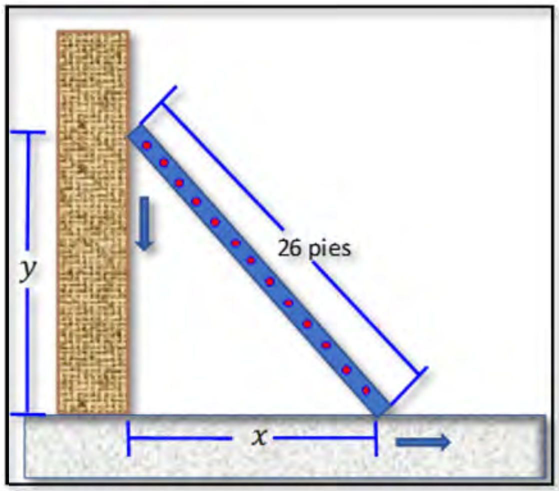
La **rapidez** a la cual disminuye el diámetro de la bola esférica cuando este es de $10\ cm$ es $\frac{1}{20\pi}\ cm/s.$

Ejemplo

Una escalera de 26 pies de largo está apoyada contra un muro vertical. La base de la escalera se desliza horizontalmente a razón de $4\ pies/s$. ¿Con que rapidez desciende el extremo superior de la escalera cuando su extremo inferior se halla a $10\ pies$ del muro?

Construimos una figura que sea una interpretación del problema

Figura 3. Escalera apoyada en un muro



Fuente: Abello (2020)

- Definimos las **variables** a utilizar

Al cabo de t segundos:
x representa la distancia de separación del extremo inferior de la escalera a la pared.
y representa la distancia del extremo superior de la escalera al piso.

Establecemos una relación entre las variables implicadas.

- Al cabo de t segundos x, y y la longitud de la escalera, que es de $26\ pies$, forman un triángulo rectángulo (salvo en el caso en que la escalera ha caido al piso) con hipotenusa constante a 26; por lo tanto, podemos aplicar el **teorema de Pitágoras** que relaciona hipotenusa: 26, y catetos x y y

$$x^2 + y^2 = 676 \quad (1)$$

- **Ritmos de cambio (o variación) dado**:

$$\frac{dx}{dt} = 4\frac{pies}{s}$$

- **Calcular**:

$$\frac{dy}{dt} \quad \text{cuando } x = 10\ pies$$

- Ahora aplicando la **regla de la cadena**, podemos derivar implícitamente en ambos lados de (1) con respecto a t

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(256)$$

$$\frac{d}{dt}(x^2) + \frac{d}{dt}(y^2) = \frac{d}{dt}(256)$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \textbf{ecuacion de razon de cambio}$$

Despejando $\frac{dy}{dt}$, se tiene

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2x}{2y}\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}, \qquad y \neq 0 \quad (2)$$

Esta última ecuación es una **formula general** que relaciona las dos derivadas dx/dt y dy/dt.

- Ahora en el caso de que $x = 10$, el valor correspondiente de y se puede obtener en (1)

$$(10)^2 + y^2 = 676 \text{ o bien } y^2 = 676 - 100 = 576$$

Por lo tanto $y = \sqrt{576} = 24$ cuando $x = 10$

- Finalmente, cuando $x = 10\,pies$, $y = 24\,pies$ y $\frac{dx}{dt} = 4\,pies^2/s$ en (2), se obtiene:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{10\,\cancel{pies}}{24\,\cancel{pies}} \cdot \left(4\frac{pies}{s}\right) = -\frac{5}{3}\frac{pies}{s}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{5}{3}\frac{pies}{s}$$

Por lo tanto, la parte superior de la escalera resbala por el muro a razón de $\frac{5}{3}\frac{pies}{s}$, cuando su extremo inferior se halla a $10\,pies$ del muro. El significado del signo negativo es que y disminuye cuando t aumenta.

2 Extremos de una Función en un Intervalo

El **cálculo** dedica un gran esfuerzo a la determinación del comportamiento de una función en un intervalo. En cuestiones de:

- ¿Tiene **valor máximo o mínimo**?
- ¿Dónde es **creciente o decreciente** la función?

Veremos que estas preguntas son importantes en las aplicaciones y de allí la importancia de la derivada.

Comenzaremos con los **máximos y mínimos** de una función en un intervalo, para ello vamos a definir lo que es un valor extremo según Larson, Hostetler y Edwards (1995).

Definición de extremo

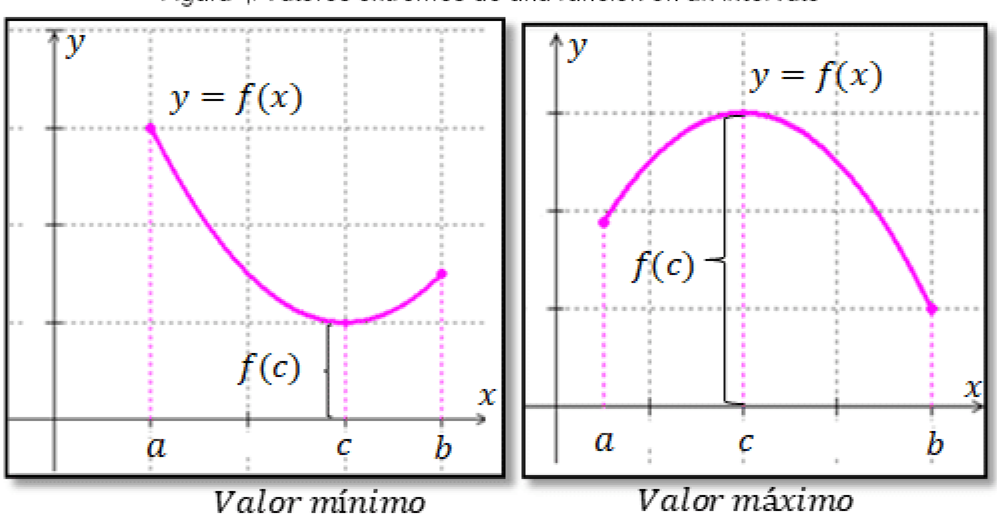
Sea ***f*** definida en un intervalo ***I*** conteniendo ***c*.**

a) *f(c)* es el ***mínimo de f*** en ***I*** si *f(c) ≤f(x)* para todo *x* en *I*.

b) *f(c)* es el ***máximo de f*** en ***I*** si *f(c) ≥f(x)* para todo *x* en *I*.

El **mínimo y el máximo** de una función en un intervalo se llama **valores extremos o extremos** de la función en ese intervalo.

Figura 4. Valores extremos de una función en un intervalo



Fuente: Abello (2020)

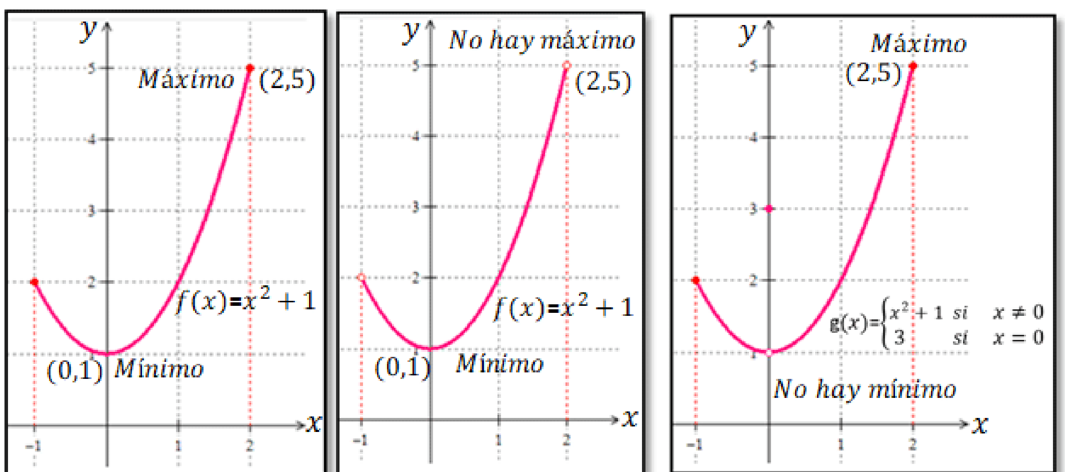
Observación: El máximo y mínimo de una función en un intervalo se llama a veces **máximo absoluto y mínimo absoluto** en ese intervalo.

Una función **no** tiene necesariamente un **máximo o un mínimo** en un intervalo.
Por ejemplo, consideremos la función

$$f(x) = x^2 + 1$$

Que me representa una parábola que abre hacia arriba y con vértice (0,1). (Unidad 1).
Examinemos esta función en los intervalos [-1,2] y (-1,2). Ver gráficas a continuación:

Figura 5. Valores extremos de una función en un intervalo



a) f *continua en* $[-1,2]$ b) f *continua en* $(-1,2)$ c) f *discontinua en* $[-1,2]$

Fuente: Abello (2020)

- Podemos observar en la gráfica a), que la función *f(x)=x* ^{2}*+1* tiene **máximo y mínimo** en el intervalo ***[-1,2].***

- En la gráfica *b)* , la función *f(x)=x* ^{2}*+1* **no tiene máximo** en el intervalo *(-1,2).*

- En la tercera gráfica *c)* , esta presenta una discontinuidad (en *x=0*), lo cual **afecta la existencia** de un extremo en el intervalo.

Esto sugiere, el siguiente **teorema** que impone condiciones que **garantizan la existencia** de un **máximo y mínimo** de la función en un intervalo.

Teorema del valor extremo

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f tiene un **máximo y también un mínimo en ese intervalo**

Observe que en la figura 5, se puede deducir que los **extremos** (máximo y mínimos) ocurren en ocasiones en sus puntos interiores del intervalo y otras veces en puntos terminales.

Extremos Relativos

Consideremos la gráfica de la función

$$f(x)=x^3-3x^2$$

que me representa una función polinómica de grado 3, cuyo dominio son todos los reales. (visto en la unidad 1). Recordemos que para graficarla basta **factorizar el polinomio** para obtener los **ceros (soluciones)** de la función (puntos donde corta el eje x) y fijarnos en el signo de a (coeficiente de la variable de mayor potencia) para mirar si la gráfica es **creciente o decreciente**. Veamos

$$f(x)=x^2\,(x-3)$$

- Hallemos los puntos de **corte con el eje** x, haciendo $y=0$:

$$x^2\,(x-3)=0$$

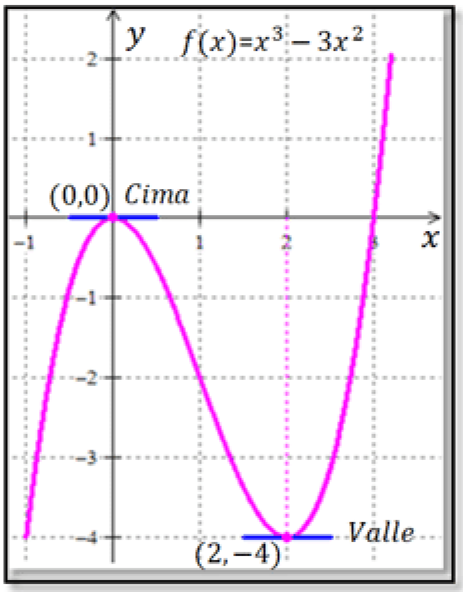
Así tenemos que los **ceros** son:

x=0 de multiplicidad 2 par (no cruza, se devuelve)

x=3 de multiplicidad 1 impar (cruza)

- Como el signo del coeficiente principal 1 es positivo, la curva es creciente. Veamos su gráfica

Figura 6. Máximo y mínimos relativos



Fuente: Abello (2020)

- La gráfica de *f* tiene un **máximo relativo** en el punto *(0,0)* y un **mínimo relativo** en el punto *(2,-4)*(cima y valle).
- Si la cima o valle **es suave y redondeada**, la gráfica tiene una **recta tangente horizontal**. Por otra parte, **si la cima o valle es angulosa o con pico** la gráfica representa una función que **no es derivable** en el punto más alto o bajo.

Definición De Extremos Relativos

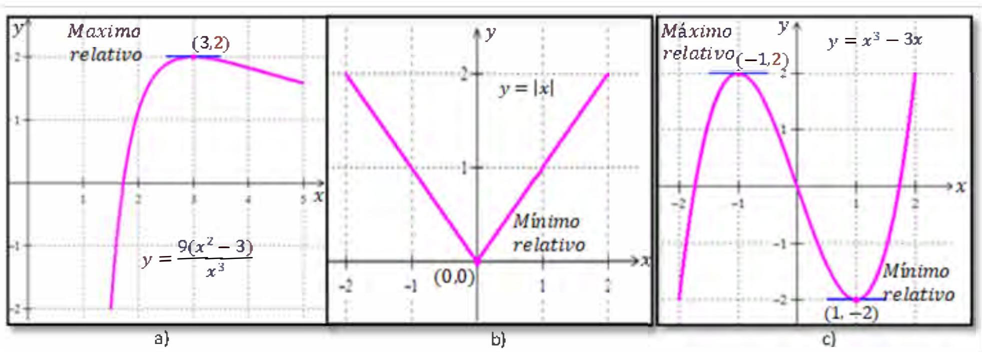
1. Si existe algún intervalo abierto en el que *f(c)* es el **valor máximo**, se dice que *f(c)* es un **máximo relativo de f.**

2. Si existe algún intervalo abierto en el que f(c) es el **valor mínimo,** se dice que f(c) es un **mínimo relativo** de f.

Ejemplo

En las siguientes gráficas hallar el **valor de la derivada** en cada uno de los extremos relativos (máximos o mínimos).

Figura 7. Valor de la derivada en los extremos relativos



Fuente: Abello (2020)

Para hallar el **valor de la derivada** en cada uno de los extremos, lo primero que debemos hacer es hallar las derivadas de cada función. Veamos

- Para la función a), definido por

$$f(x) = \frac{9(x^2-3)}{x^3}$$

Se tiene (derivada de un cociente)

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{\frac{d}{dx}[9(x^2-3)]\cdot(x^3) - \frac{d}{dx}(x^3)\cdot 9(x^2-3)}{[x^3]^2} = \frac{9(2x)\cdot(x^3) - (3x^2)\cdot 9(x^2-3)}{x^6}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{18x^4 - 27x^2(x^2-3)}{x^6} = \frac{18x^4 - 27x^4 + 81x^2}{x^6} = \frac{81x^2 - 9x^4}{x^6} = \frac{9\cancel{x^2}(9-x^2)}{\cancel{x^6}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{9(9-x^2)}{x^4}}$$

Por lo tanto, en el punto $(3{,}2)$ (en la gráfica a)), el valor de la derivada es $f'(3) = 0$.

- Para la función $\boldsymbol{b}$), definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

$f'(0)$ **no existe**, ya que

Utilizando la definición de la derivada

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

donde $f(x_1) = f(0)$. Entonces

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

Para hallar el límite de $f(x)$ cuando $h \to 0$, debemos analizar los límites laterales, teniendo en cuenta que $|h| = -h$ si $h < 0$ y $|h| = h$ si $h > 0$

$$f'_{-}(0) = \lim_{h \to 0^-} -\frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^-} -1 = -1 \quad y \quad f'_{+}(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^-} 1 = 1$$

Como

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} \neq \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h}$$

Se tiene que $f'(0)$ **no existe**, de modo que f **no es diferenciable o derivable en** $\boldsymbol{x = 0}$. Así la gráfica de la función f **no tiene recta tangente en el origen**.

- Para la función $\boldsymbol{c}$), definido por

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Se tiene

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Evaluando en los puntos $(-1,2)$ y $(1,-2)$

$f'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 0$

$f'(1) = 3(1)^2 - 3 = 0$

Importante: En el ejemplo anterior se observa que en un **extremo relativo** la **derivada es cero o no existe**. Llamaremos **números críticos** a esos valores especiales de x.

Número crítico

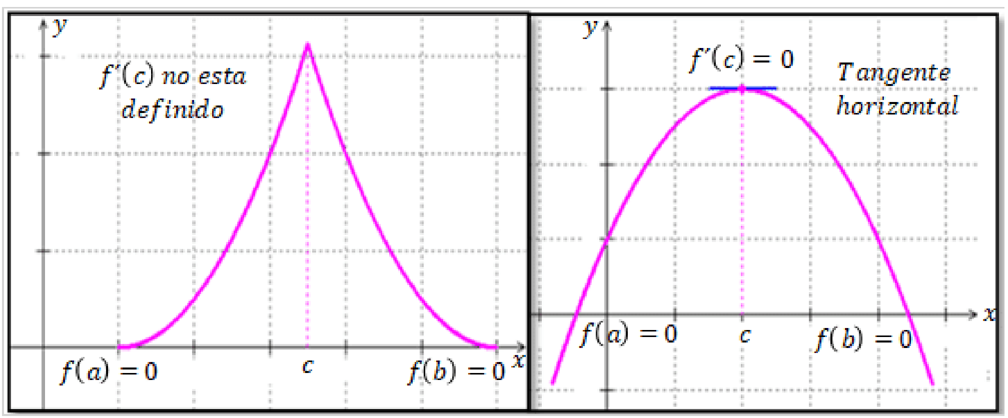
Si ***f*** está definido en ***c*,** se dirá que ***c* es un número crítico** de f si $f'(c)=0$, o si f' no está definido en c.

Teorema

Si f tiene un **extremo relativo** (máximo o mínimo) en $x=c$, entonces c es un número crítico de f.

A continuación, mostramos la gráfica de los dos tipos de números críticos

Figura 8. Tipos de números críticos en $x = c$



Fuente: Abello (2020)

Combinando lo anterior y con nuestro conocimiento de los extremos en puntos terminales, llegamos a la siguiente estrategia para hallar los extremos en un intervalo cerrado.

Estrategia para hallar extremos en un intervalo cerrado

Para halar los extremos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$, se deben seguir los siguientes pasos:

a) Hallar los **números críticos** de f. (Hacemos $f'(x) = 0$ y **resolvemos la ecuación**)

b) Evaluar f en cada número crítico que tenga en (a, b).

c) Evaluar f en los puntos terminales de $[a, b]$.

d) El **menor** de tales valores es el **mínimo**; el **mayor es el máximo.**

Nota: Es importante tener en cuenta que cuando **analicemos una gráfica**, definamos su dominio, interceptos con los ejes y su simetría, como se vio en la unidad y las formas de sus gráficas.

Ejemplo

Hallar los **extremos** de la función $f(x) = 2x^4 - 3x^3$ en el intervalo cerrado $[-1,2]$ y graficar.

Aplicando **la estrategia para hallar los extremos** de una función en un intervalo.

- Para hallar los **números críticos** de la función, la derivamos e igualamos a cero. Esto es porque estamos hallando los valores de x, donde exista una recta **tangente horizontal** $f'(x) = m_T = 0$

$$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 = 0$$

$$x^2(8x - 9) = 0 \quad \text{Factor común}$$

$$x^2 = 0 \quad \text{o} \quad 8x - 9 = 0$$

Así los **números o valores críticos son**: $x = 0$ o $x = 9/8$ y estos pertenecen al intervalo dado.

- Evaluamos los **números críticos** y los **puntos terminales** del intervalo $[-1,2]$. ($x = -1$ y $x = 2$)

$f(-1) = 2(-1)^4 - 3(-1)^3 = 2(1) - 3(-1) = 5$

$f(0) = 2(0)^4 - 3(0)^3 = 2(0) - 3(0) = 0$

$f\left(\frac{9}{8}\right) = 2(9/8)^4 - 3\left(\frac{9}{8}\right)^3 = 2\left(\frac{6561}{4096}\right) - 3\left(\frac{729}{512}\right) = \frac{6561}{2048} - \frac{2187}{512} = -\frac{2187}{2048}$

Valor mínimo. Ocurre en el punto $\left(\frac{9}{8}, -\frac{2187}{2048}\right)$

$f(2) = 2(2)^4 - 3(2)^3 = 2(16) - 3(8) = 32 - 24 = 8$ Valor máximo. Ocurre en el punto $(2,8)$.

- Con esta información de los **valores extremos (máximos y mínimos)**, podemos graficar más detalladamente y le anexamos dominio e interceptos (cortes con los ejes).

- **El dominio de f** son todos los números reales (por ser una función polinómica).

- **Interceptos: corte con el eje x**: se hace $y = 0$, entonces:

$$2x^4 - 3x^3 = 0 \implies x^3(2x - 3) = 0 \text{ factor común}$$

Por lo tanto

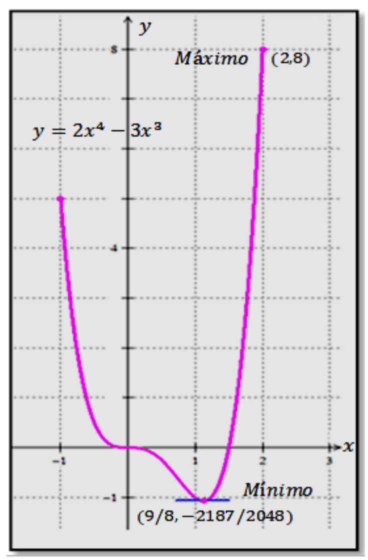
$$x = 0 \text{ o } 2x - 3 = 0 \implies 2x = 3 \implies x = 3/2$$

Asi la gráfica corta el eje x en los puntos: $(0{,}0)$ y $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

corte con el eje y: se hace $x = 0$, entonces: $f(0) = 2(0)^4 - 3(0)^3 = 2(0) - 3(0) = 0$.

Asi la gráfica corta el eje y en el punto: $(0{,}0)$. Veamos su gráfica

Figura 9. Extremo en un intervalo



Fuente: Abello (2020)

Ejemplo

Hallar los **extremos** de la función $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$ en el intervalo cerrado $[-1{,}3]$ y graficar.

Aplicando **la estrategia para hallar los extremos** de una función en un intervalo.

- Para hallar los **números críticos** de la función, la derivamos e igualamos a cero.

$$f'(x) = 2 - 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = 2 - 2x^{-\frac{1}{3}} = 2 - \frac{2}{x^{1/3}} = \frac{2x^{1/3} - 2}{x^{1/3}} = \frac{2(x^{1/3} - 1)}{x^{1/3}}$$

$$x^{1/3} - 1 = 0 \text{ o } x^{1/3} = 0$$

Asi los **números o valores críticos son**: $x = 1$ o $x = 0$ y estos pertenecen al intervalo dado. Además

$$f'(1) = \frac{2((1)^{1/3} - 1)}{(1)^{1/3}} = 0 \quad y \quad f'(0) = \frac{2((0)^{1/3} - 1)}{(0)^{1/3}} = -\frac{2}{0} \quad \textbf{no esta definido}$$

Ver figura 7.

Ejemplo

Hallar los **extremos** de la función $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$ en el intervalo cerrado $[-1,3]$ y graficar.

Aplicando **la estrategia para hallar los extremos** de una función en un intervalo.

- Para hallar los **números críticos** de la función, la derivamos e igualamos a cero.

$$f'(x) = 2 - 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = 2 - 2x^{-\frac{1}{3}} = 2 - \frac{2}{x^{1/3}} = \frac{2x^{1/3} - 2}{x^{1/3}} = \frac{2(x^{1/3} - 1)}{x^{1/3}}$$

$$x^{1/3} - 1 = 0 \ \text{ o } \ x^{1/3} = 0$$

Asi los **números o valores críticos son**: $x = 1$ o $x = 0$ y estos pertenecen al intervalo dado. Además

$$f'(1) = \frac{2((1)^{1/3} - 1)}{(1)^{1/3}} = 0 \quad y \quad f'(0) = \frac{2((0)^{1/3} - 1)}{(0)^{1/3}} = -\frac{2}{0} \quad \textbf{no esta definido}$$

Ver figura 7.

- Evaluamos los **números críticos** y los **puntos terminales** del intervalo $[-1,3]$. ($x = -1$ y $x = 3$)

  $f(-1) = 2(-1) - 3(-1)^{2/3} = -2 - 3(1) = -5$. Valor mínimo. Ocurre en el punto $(-1,-5)$.

  $f(0) = 2(0) - 3(0)^{2/3} = 0$. Valor máximo. Ocurre en el punto $(0,0)$.

  $f(1) = 2(1) - 3(1)^{2/3} = 2 - 3(1) = -1$.

  $f(3) = 2(3) - 3(3)^{2/3} = 6 - 3\sqrt[3]{9} \approx -0.24$.

- Con esta información de los **valores extremos (máximos y mínimos)**, podemos graficar más detalladamente y le anexamos, dominio e interceptos (cortes con los ejes).

- **El dominio de f** son todos los números reales

- **Interceptos**: **corte con el eje** x: se hace $y = 0$, entonces:

$$2x - 3x^{2/3} = 0 \implies x^{2/3}(2x^{1/3} - 3) = 0 \ \text{factor común}$$

Por lo tanto

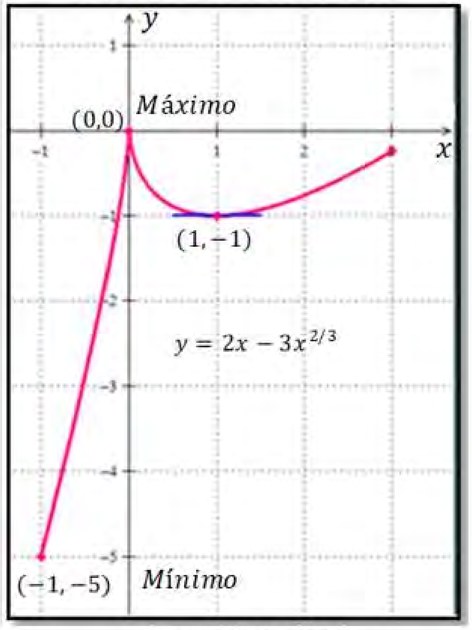
$$x = 0 \text{ o } 2x^{1/3} - 3 = 0 \implies 2x^{1/3} = 3 \implies x^{1/3} = \frac{3}{2} \implies x = \frac{27}{8} \approx 3.38$$

Así la gráfica corta el eje x en los puntos: $(0,0)$ y $\left(\frac{27}{8},0\right)$ $\notin$ **al intervalo** $[-1,3]$.

corte con el eje y: se hace $x = 0$, entonces: $f(0) = 2(0) - 3(0)^{2/3} = 0$

Asi la gráfica corta el eje y en el punto: $(0,0)$. Veamos su gráfica

Figura 10. Extremo en un intervalo



Fuente: Abello (2020)

3 Teorema De Rolle y Valor Medio

Uno de los teoremas más importantes del cálculo es el **teorema de valor medio o intermedio**, el cual se emplea en la demostración de muchos teoremas tanto de cálculo diferencial, como del cálculo integral, así como de otras materias como el análisis numérico. La demostración del teorema del valor medio está basado sobre un caso especial conocido como **teorema de Rolle**, el cual discutiremos primero.

Un poco de historia

Michel Rolle, matemático francés (1652-1719), publicó por primera vez el teorema de Rolle en su libro titulado Méthode pour resoudre les egalitéz. Sin embargo, después se volvió crítico de los métodos de su época y atacó el cálculo infinitesimal tachándolo de ser un conjunto de falacias ingeniosas .

A continuación, **enunciaremos el teorema de Rolle,** según Stewart (2001),

Teorema de Rolle

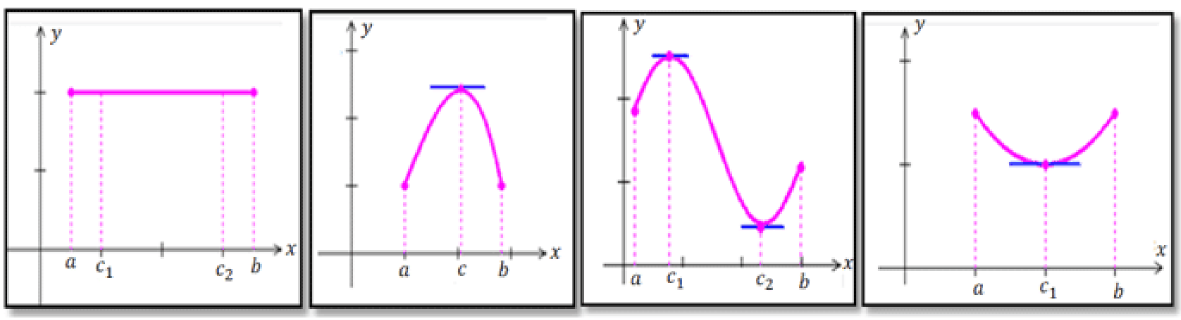
Sea *f* una función que satisface las tres hipótesis siguientes

1. *f* es continua en el intervalo cerrado *[a,b]*.
2. *f* es diferenciable en el intervalo abierto *(a,b)*.
3. *f(a)=f(b)* o *f(a)=f(b)=0*

Entonces **existe un número** *c*, en *(a,b)*, tal que *f' (c)=0 (m=0)*

Consideremos las siguientes **gráficas de algunas funciones** y las características que satisfacen las tres hipótesis. Veamos

Figura 11. Teorema de Rolle



Fuente: Abello (2020)

En las gráficas observamos, que, en cada caso, parece que al menos hay un punto (c,f(c)) de la gráfica donde la tangente es horizontal y, por consiguiente, f (c)=0. Por lo anterior, el teorema de Rolle parece aceptable.

Ejemplo

Sea $f(x) = 4x^3 - 9x$. Verificar que se **cumplen las hipótesis del teorema de Rolle** en el intervalo $[-3/2,0]$, $[0,3/2]$ y $\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$. Hallar al menos un valor apropiado de c, en cada uno de estos intervalos para los cuales $f'(c) = 0$.

- Evidentemente f es **continua y derivable** sobre R por ser una función polinómica, de esta manera se cumplen las **dos primeras condiciones del teorema de Rolle**.

- Evaluamos los valores extremos $x = -3/2$, $x = 0$, $x = 3/2$ en la función dada:

$$f(-3/2) = 4(-3/2)^3 - 9\left(-\frac{3}{2}\right) = 4\cdot\left(-\frac{27}{8}\right) + \frac{27}{2} = -\frac{27}{2} + \frac{27}{2} = 0.$$

$$f(0) = 4(0)^3 - 9(0) = 0.$$

$$f(3/2) = 4(3/2)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right) = 4\cdot\left(\frac{27}{8}\right) - \frac{27}{2} = \frac{27}{2} - \frac{27}{2} = 0.$$

Por lo tanto, se cumple **la tercera condición del teorema de Rolle** en $[-3/2,0]$, $[0,3/2]$ y $\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$

- Entonces existe valores de c tales que $f'(c) = 0$. Así

$$f'(x) = 12x^2 - 9$$

$$f'(c) = 12c^2 - 9 = 0 \implies 12c^2 = 9 \implies c^2 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \implies c = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \approx \pm 0.87$$

En los intervalos dados tenemos:

$$[-3/2,0]: \quad c = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$[0,3/2]: \quad c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]: \quad c = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;\; y: \quad c = \frac{\sqrt{3}}{2}: \text{ Presenta dos valores posibles}$$

- Podemos graficar esta función, para ello evaluamos en f los valores de

$$c = x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

donde cumple que $f'(c) = 0$. Es decir, encontramos rectas tangente horizontales (máximos y minimos) en los intervalos dados. Así

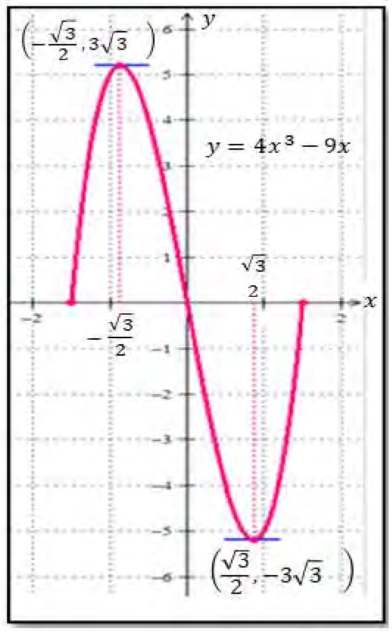
$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 9\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4\frac{\sqrt{3}^3}{8} + \frac{9}{2}\sqrt{3} = -\frac{12}{8}\sqrt{3} + \frac{9}{2}\sqrt{3} = -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{9}{2}\sqrt{3} = \frac{6}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\frac{\sqrt{3}^3}{8} - \frac{9}{2}\sqrt{3} = \frac{12}{8}\sqrt{3} - \frac{9}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{2}\sqrt{3} = -\frac{6}{2}\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$$

Por lo tanto, los puntos donde existe una **recta tangente horizontal** son:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 3\sqrt{3}\right) \;\; y \;\; \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -3\sqrt{3}\right)$$

Figura 12. Teorema de Rolle



Fuente: Abello (2020)

Ejemplo

Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Verificar si **cumple la hipótesis del teorema de Rolle** en el intervalo $[-1,1]$.

- Evidentemente f es **continua en el intervalo** $[-1,1]$, ya que su **dominio** son todos los reales. Por lo tanto, cumple **la primera condición del teorema de Rolle**.

- Evaluamos los valores extremos $x = -1$, $x = 1$, en la función dada:

  $f(-1) = 1 - (-1)^{\frac{2}{3}} = 1 - 1 = 0$.

  $f(1) = 1 - (1)^{\frac{2}{3}} = 1 - 1 = 0$.

  Por lo tanto, se cumple **la tercera condición del teorema de Rolle** en $[-1,1]$.

- Pero f **no es diferenciable** en $x = 0$, en consecuencia, no es diferenciable en el intervalo $(-1,1)$. No cumple **la segunda condición del teorema de Rolle** en intervalo abierto $(-1,1)$.

  Observe:

  $$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}, \qquad x \neq 0$$

  $f'(0)$ **no existe** (no es diferenciable o derivable en $x = 0$).

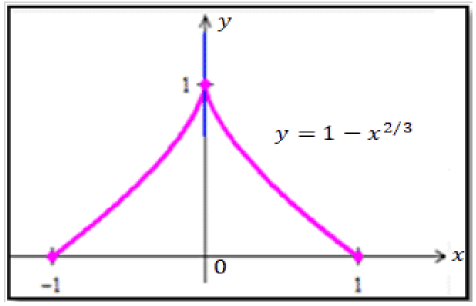
  Evaluando este valor $x = 0$ en la función se tiene:

  $f(0) = 1 - (0)^{\frac{2}{3}} = 1$.

  Así f presenta una **recta tangente vertical** en el punto $(0,1)$.

  En este caso, sin embargo, en $(-1,1)$ **no existe algún** c para el cual $f'(c) = 0$. **No cumple con el teorema de Rolle.**

Figura 13. Teorema de Rolle



Fuente: Abello (2020)

Nuestra aplicación. principal del Teorema de Rolle será con el fin de demostrar este importante teorema, enunciado por primera vez por otro matemático francés, Joseph-louis Lagrange.

Teorema del valor medio

Sea *f* una función que satisface las siguientes hipótesis:

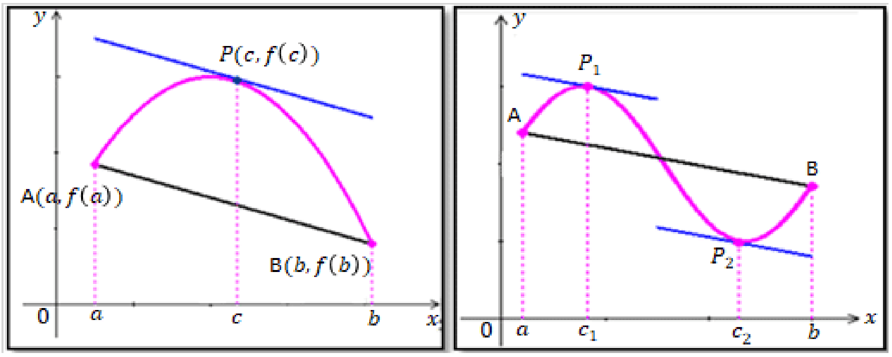
1. *f* es continua en el intervalo cerrado *[a, b]*.
2. *f* es diferenciable en el intervalo abierto *(a, b)*.

Entonces **existe un número** *c*, en *(a, b)*, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Veamos una interpretación geométrica. En la figura *a)* y *b)* se muestran los puntos *A(a,f(a)), B(b,f(b))* de dos funciones derivables

Figura 14. Teorema del valor medio



Fuente: Abello (2020)

La **pendiente** de la recta secante $\overline{AB}$ es

$$\mathbf{m}_{\overline{AB}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Recordemos que la pendiente $\mathbf{m}$ de la recta que pasa por los puntos $\mathbf{P}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{Q}(x_2, y_2)$ este dado por

$$\mathbf{m} = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Que es la misma expresión que hay en la hipótesis del **teorema del valor medio**. Ya que $f'(c)$ es la **pendiente de la tangente** a la curva, en el punto $(c, f(c))$, el teorema del valor medio en su forma, expresada por la ecuación de la hipótesis 2) $(\mathbf{TVM})$, dice que al menos hay un punto $P(c, f(c))$; en la gráfica en que la **pendiente de la tangente es igual a la pendiente de la secante**
$\overline{AB}$; en otras palabras, existe un punto P, donde la tangente es paralela a la secante $\overline{AB}$.

Ejemplo

Dada la función $f(x) = x^3 - x$ definida sobre el intervalo $[0,2]$, ¿existe un número c en el intervalo abierto que cumple la **conclusión del teorema del valor intermedio?**

- Puesto que f es una función polinómica continua sobre $[0,2]$.
- f es diferenciable en el intervalo $(0,2)$.
- Por consiguiente, de acuerdo con el teorema del valor medio, hay un número c, en $(0,2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \quad (1)$$

Ahora bien, $f(2) = (2)^3 - 2 = 8 - 2 = 6$, $f(0) = (0)^3 - 0 = 0$ y $f'(x) = 3x^2 - 1$, así que la ecuación (1) se transforma en

$$3c^2 - 1 = \frac{6 - 0}{2} \quad \Rightarrow \quad 3c^2 - 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad 3c^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad c^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Pero c debe estar en $(0,2)$, de modo que $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ o $c = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1.15$

Por consiguiente, existe un valor de c en el intervalo $(0,2)$, que cumple la **conclusión del teorema del valor intermedio** y ese valor es $c = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1.15$

- Podemos **graficar esta función**, aprovechando la información que tenemos, para ello evaluamos en f el valor de $\boldsymbol{c}$

$$c = x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{27}\sqrt{3^3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{24}{27}\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{9}\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3} \approx 0.39$$

En el punto $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3}\right)$, existe una recta tangente **paralela a la recta secante,** formada por los puntos extremos del intervalo

$$f(0) = 0 \text{ y } f(2) = 6$$

- Además, tenemos que el dominio de f son todos los números reales.

- **Interceptos: corte con el eje $\boldsymbol{x}$**: se hace $y = 0$, entonces:

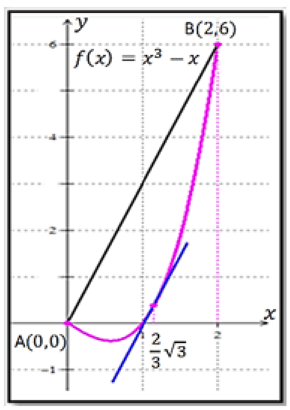
$$x^3 - x = 0 \implies x(x^2 - 1) = 0 \text{ factor común}$$

Por lo tanto

$$x = 0 \text{ o } x^2 - 1 = 0 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

Así la gráfica corta el eje x en los puntos: $(0,0)$ y $(1,0)$, y el punto $(-1,0) \notin$ **al intervalo** $(0,2)$.

Figura 15. Teorema del valor medio



Fuente: Abello (2020)

Ejemplo.

Si $f(x) = x^{2/3}$, mostrar que no existe un número $\boldsymbol{c}$ en el intervalo abierto $(-2,2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} \quad (1)$$

Que parte de la hipótesis del teorema del valor medio (TVM) no se cumple para f en $[-2,2]$.

Aplicando las condiciones del teorema del valor medio tenemos:

- f es continua en el intervalo cerrado $[-2,2]$.
- f **no es diferenciable** en el intervalo abierto $(-2,2)$ porque $f'(0)$ **no existe.** Veamos

Al derivar o diferenciar f se tiene

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}, \qquad x \neq 0$$

de modo que

$$f'(c) = \frac{2}{3c^{1/3}}$$

Además

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{(2)^{2/3} - (-2)^{2/3}}{4} = \frac{4^{1/3} - 4^{1/3}}{4} = 0$$

No existe ningún número c para el cual:

$$f'(c) = 0 \implies \frac{2}{3c^{1/3}} = 0$$

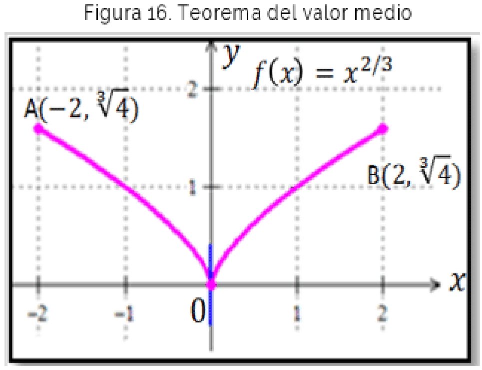
En consecuencia, la condición 2) del **teorema del valor medio no se cumple**.

- Gráfica: evaluando el valor de $x = 0$ en la función se tiene: $f(0) = (0)^{\frac{2}{3}} = 0$, dado que allí $f'(0)$ **no existe**, por lo tanto, presenta una **recta tangente vertical.**

Ahora evaluamos en f los valores extremos del intervalo, o sea $x = -2$ y $x = 2$

$$f(2) = (2)^{2/3} = \sqrt[3]{4} \approx 1.59 \;\; y \;\; f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$$

Figura 16. Teorema del valor medio



Fuente: Abello (2020)

4 Funciones Crecientes y Decrecientes. El Criterio de la Primera Derivada

Se ha observado que la **derivada** es de gran utilidad para localizar **extremos relativos,** de una función.

Ahora utilizaremos la **derivada para clasificarlos como máximos o mínimos.**

Empezaremos definiendo que es una función creciente o decreciente en un intervalo.

Funciones crecientes y decrecientes

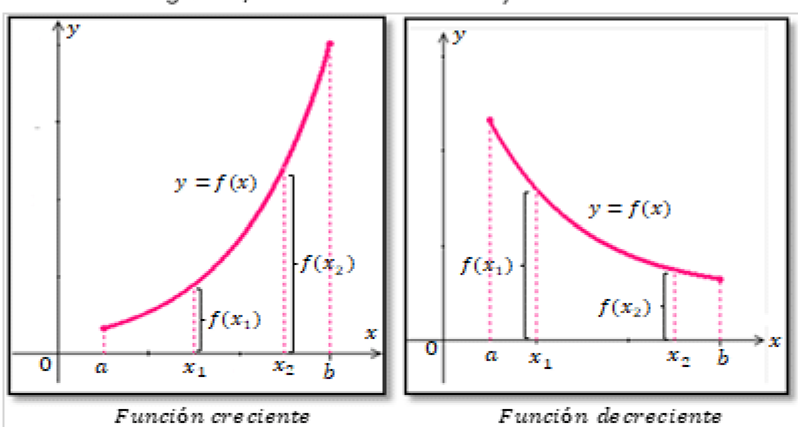
1. Una función f se dice creciente en un intervalo si para todo par de números x_1, x_2 en el intervalo,

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

2. Una función f se dice decreciente en un intervalo si para todo par de números x_1, x_2 en el intervalo,

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

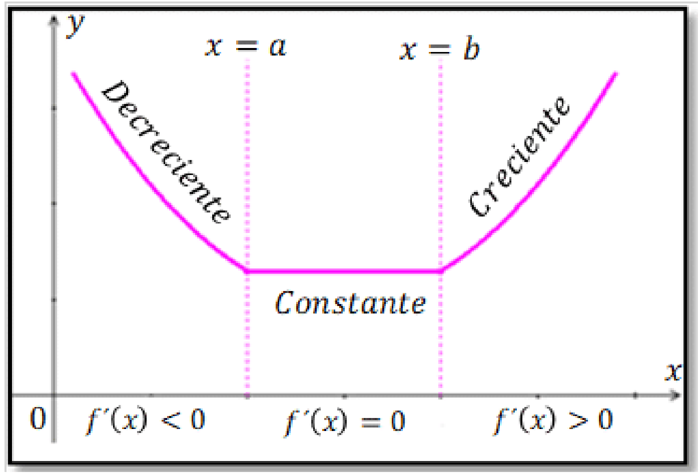
Figura 17. Función creciente y decreciente



Fuente: Abello (2020)

Observemos en la gráfica siguiente que la **derivada** va a determinar cuándo una función es creciente, es decir *f' (x)>0*, esto indica que una **derivada positiva** implica que la pendiente de la gráfica asciende. En forma similar una derivada negativa produce pendiente en descenso y una d**erivada nula** en un intervalo implica que la función es constante en él. Por ello **enunciaremos en un criterio las funciones crecientes y decrecientes.**

Figura 18. Función decreciente, constante y creciente



Fuente: Abello (2020)

Criterio para funciones crecientes o decrecientes

Sea *f* es una función diferenciable en un intervalo *(a, b)* (continua)

1. Si *f' (x)>0* para todo *x* en *(a, b)*, entonces *f* es creciente en *(a, b)*.
2. Si *f'(x)<0* para todo *x* en *(a, b)*, entonces *f* es decreciente en *(a, b).*
3. Si *f' (x)=0* para todo *x* en *(a, b)*, entonces *f* es constante en *(a, b)*.

   Para **aplicar el criterio** anterior hay que hacer notar que si *f* es **continua en el intervalo** (a, b), entonces *f' x)* solo puede cambiar de **signo en los números críticos**. Se sugiere la siguiente estrategia:

Estrategia para hallar los intervalos donde una función es creciente o decreciente

Sea *f* una función **continua en el intervalo abierto** *(a, b)*. Para **hallar los intervalos abiertos** en los que *f* es *crecienteo decreciente*se procede de la siguiente manera:

- Localizar o hallar los números críticos de *f* en *(a, b)*. (recuerde hacemos *f' (x)=0)*
- Determinar el signo de *f'(x)* en un valor de *x* arbitrario, **antes y después** del valor crítico hallado.
- Usarel criterio anterior para decidir si *f* es creciente o decreciente en cada uno de sus intervalos.

Ejemplo.

Hallar los **intervalos abiertos en los que es creciente o decreciente** la función

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

Siguiendo la estrategia anterior tenemos

- Por ser **una función polinómica** de grado tres, es continua para todos los números reales.
- Hallemos los valores críticos de la función, haciendo $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2x = 3x^2 - 3x = 0$$
$$3x(x-1) = 0 \ \text{ factor común}$$
$$3x = 0 \ \text{ o } \ x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

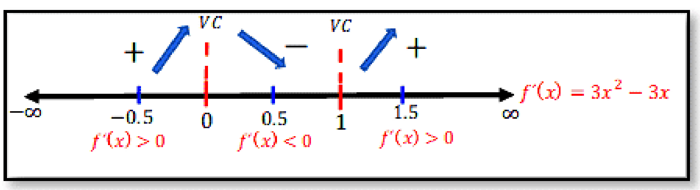
Así los **números críticos** son: $x = 0$ o $x = 1$. Evaluando estos valores en la función tenemos

$$f(0) = (0)^3 - \frac{3}{2}(0)^2 = 0$$

$$f(1) = (1)^3 - \frac{3}{2}(1)^2 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

- Determinemos el signo de $f'(x)$ en un valor de x arbitrario, **antes y después** del valor **crítico** hallado

Figura 19. Función creciente o decreciente



Fuente: Abello (2020)

En la figura observamos valores críticos $x = 0$ o $x = 1$

✓ Para $x < 0$, digamos $x = -0.5$, en la derivada:

$$f'(-0.5) = 3(-0.5)^2 - 3(-0.5) = 2.25 > 0 \text{ es positivo}$$

✓ Para $0 < x < 1$, digamos $x = 0.5$, en la derivada:

$$f'(0.5) = 3(0.5)^2 - 3(0.5) = -0.75 < 0 \text{ es negativo}$$

✓ Para $x > 1$, digamos $x = 1.5$, en la derivada:

$$f'(1.5) = 3(1.5)^2 - 3(1.5) = 2.25 > 0 \text{ es positivo}$$

- Aplicando el criterio anterior concluimos que:

  ✓ f es **creciente** en los intervalos: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

  ✓ f es **decreciente** en el intervalo: $(0,1)$

- Para graficar utilizamos los **valores críticos** evaluados en f, que conllevan a los extremos de la función y le anexamos los interceptos (cortes con los ejes). Así tenemos:

  Puntos críticos: $(0,0)$ y $(1, -1/2)$

  Interceptos: corte con el eje x: se hace $y = 0$, entonces:

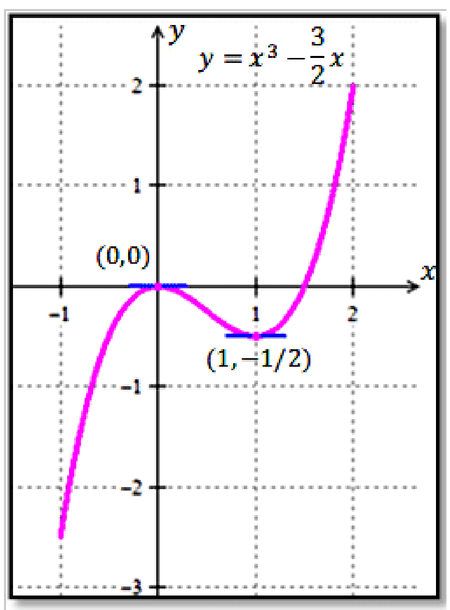
$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \implies x^2\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0 \text{ factor común}$$

Por lo tanto

$$x = 0 \text{ o } x - 3/2 = 0 \implies x = 3/2$$

Así la gráfica corta el eje x en los puntos: $(0,0)$ y $(3/2,0)$.

Figura 20. Función creciente o decreciente



Fuente: Abello (2020)

Criterio de la Primera Derivada

Una vez localizados los intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función, podemos localizar los extremos relativos con facilidad. Del ejemplo anterior se observa que la función *f(x)* tiene un **máximo relativo** en el punto *(0, 0)*, ya que *f* es **creciente** justo a la izquierda de *x=0* y **decreciente** inmediatamente a la derecha. Del mismo modo *f* tiene un **mínimo relativo** en el punto *(1,-1/2)* porque *f* esta **decreciendo** justo a la izquierda de *x=1* y **creciendo** a la derecha. Por ello se **enunciará una generalización de esta situación**

Sea ***c*** **un numero crítico** de una función *f* continua en un intervalo abierto ***I*** que contiene a ***c*** **Si** *f* es derivable en el intervalo, excepto quizá en ***c*, *f(c)*** puede clasificarse como sigue

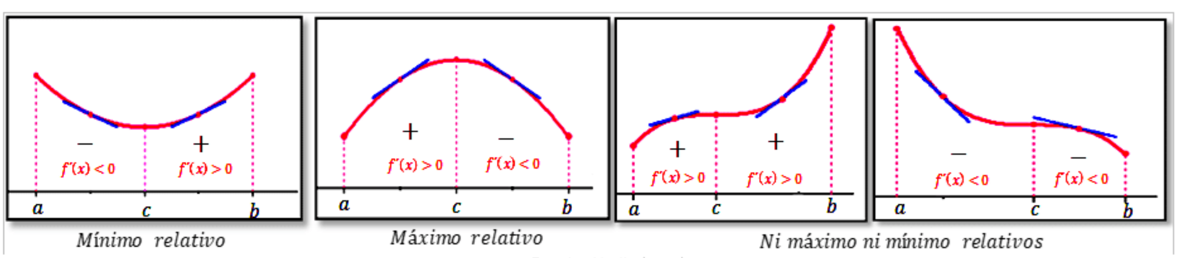
Si *f' (x)* cambia de **negativo a positivo** en *c, f(c)* es un **mínimo relativo** de *f.*

Si *f'(x)* cambia de **positivo a negativo** en *c, f(c)* es un **máximo relativo** de *f.*

Si *f' (x)* no cambia de **signo** en *c, f(c)* no es máximo ni mínimo relativo.

En la **siguiente figura** se presenta estos hechos.

Figura 21. Criterio de la primera derivada



Fuente: Abello (2020)

Ejemplo.

Hallar los máximos y mínimos (si existen), **intervalos abiertos en los que es creciente o decreciente** (**aplicando los criterios** vistos), así como su dominio e interceptos, de la función

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 4$$

- Por ser **una función polinómica** su **dominio** son todos los números reales.

- **Interceptos**: **corte con el eje** x: se hace $y = 0$, entonces:

$$\frac{1}{3}x^3 - x + 4 = 0 \text{ no es factorizable}$$

corte con el eje y: se hace $x = 0$, entonces

$$f(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - (0) + 4 = 4$$

sí la gráfica **corta el eje** y en el punto $(0,4)$

- Hallamos los **puntos críticos** de la función, haciendo $f'(x) = 0$

$$f'(x) = x^2 - 1 = 0 \implies (x+1)(x-1) = 0 \text{ diferencia de cuadrados}$$

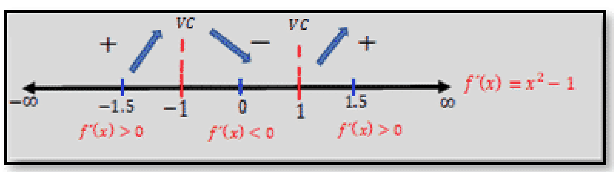
Así los **números críticos** son: $x = -1$ o $x = 1$. Evaluando estos valores en la función tenemos

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1) + 4 = -\frac{1}{3} + 1 + 4 = \frac{14}{3}$$

$$f(1) = \frac{1}{3}(1)^3 - (1) + 4 = \frac{1}{3} - 1 + 4 = \frac{10}{3}$$

- Determinemos el signo de $f'(x)$ en un valor de x arbitrario, **antes y después** del valor **crítico** hallado.

Figura 22. Criterio de la primera derivada e intervalos de crecimiento y decrecimiento



Fuente: Abello (2020)

En la figura observamos **valores críticos** $x = -1$ o $x = 1$

✓ Para $x < -1$, digamos $x = -1.5$, en la derivada:

$$f'(-1.5) = (-1.5)^2 - 1 = 1.25 > 0 \text{ es positivo}$$

✓ Para $-1 < x < 1$, digamos $x = 0$, en la derivada:

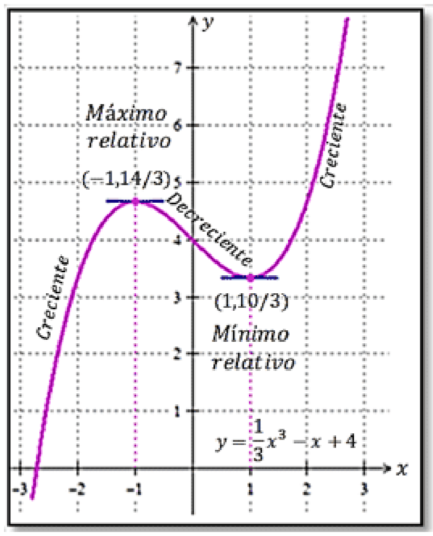
$$f'(0) = (0)^2 - 1 = -1 < 0 \text{ es negativo}$$

✓ Para $x > 1$, digamos $x = 1.5$, en la derivada:

$$f'(1.5) = (1.5)^2 - 1 = 1.25 > 0 \text{ es positivo}$$

- Aplicando el **criterio para las funciones crecientes o decrecientes** concluimos que:
  - ✓ f es **creciente** en los intervalos: $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$
  - ✓ f es **decreciente** en el intervalo: $(-1,1)$
- Finalmente aplicando el **criterio de la primera derivada**, concluimos que f tiene un **máximo relativo** en el punto $(-1, 14/3)$ (en f' **hay cambio** de signo en el punto crítico $x=-1$ de positivo a negativo), un **mínimo relativo** en el punto $(1, 10/3)$ (en f' **hay cambio** de signo en el punto crítico $x=1$ de negativo a positivo). Con esta información podemos graficar.

Figura 23. Criterio de la primera derivada e intervalos de crecimiento y decrecimiento



Fuente: Abello (2020)

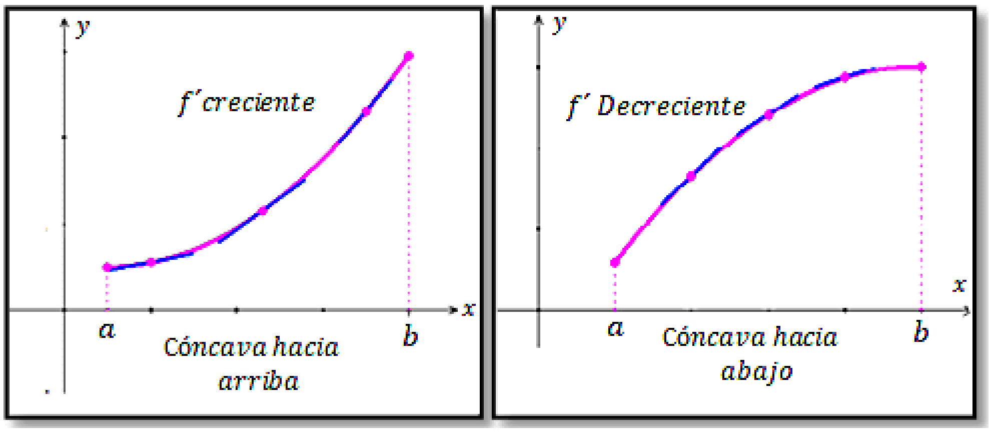
5 Concavidad y Criterio de la Segunda Derivada

Hasta ahora hemos utilizado la derivada f' para la localización de los intervalos en que f **crece o decrece** que son de gran importancia para graficar. Para ello utilizando este concepto podremos determinar donde se **curva hacia arriba o hacia abajo** la gráfica de f. En otras palabras, vamos a analizar su concavidad.

Concavidad

Sea f derivable en un intervalo abierto. Diremos que la gráfica de f es **cóncava hacia arriba** si f' es **creciente** en ese intervalo y es **cóncava hacia abajo** si f' es **decreciente** en el intervalo.

Figura 24. Concavidad



Fuente: Abello (2020)

También podemos decir que la gráfica de *f* es **cóncava hacia arriba** si la curva queda **arriba de las tangentes** en el intervalo *(a, b)*. Si queda debajo de sus tangentes en *(a, b)*, la gráfica de *f* es cóncava hacia abajo.

Vamos a definir un **criterio** que nos va a enseñar cómo utilizar la **segunda derivada** de *f* para determinar los intervalos **donde *f* es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.**

Criterio de concavidad

Sea *f* una función cuya derivada existe en un intervalo abierto *I*.

1. Si $f''(x)>0$ para todo *x* en *I*, la gráfica de *f* es cóncava hacia arriba.
2. Si $f''(x)<0$ para todo *x* en *I*, la gráfica de *f* es cóncava hacia abajo.
3. Si $f''(x)=0$ para todo *x* en *I*, *f* es lineal es decir no presenta concavidad.

Para hallar entonces los **intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo** primero localizamos los valores de *x* en los que $f''(x)=0$ o $f''(x)$ no está definida. A continuación,determinar el signo de $f''(x)$ en un valor de *x* arbitrario, antes y después del valor o valores hallados cuando $f''(x)=0$.

Ejemplo.

Sea

$$f(x) = \frac{4}{x^2+3}$$

Analizar la gráfica hallando dominio, interceptos, simetría, intervalos **abiertos en los que es creciente o decreciente**, valores extremos (máximo y mínimos si existen), intervalos de concavidad. (graficar).

- El **dominio** de la función son todos los números reales (no hay valores de x que hagan cero el denominador)

- **Interceptos: corte con el eje x**: se hace $y = 0$, entonces:

$$\frac{4}{x^2+3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4 = 0(\,x^2+3) \quad \Longrightarrow 4 \neq 0$$

La gráfica no corta el eje x
corte con el eje y: se hace $x = 0$, entonces

$$f(0) = \frac{4}{(0)^2+3} = 4$$

sí la gráfica **corta el eje y** en el punto $(0{,}4)$

- **Simetría**:

$$f(-x) = \frac{4}{(-x)^2+3} = \frac{4}{x^2+3} = f(x)$$

Como $f(-x) = f(x)$, entonces la función es par, simétrico al eje y.

- Hallamos los valores **críticos** de la función, para ello derivamos

$$f(x) = \frac{4}{x^2+3}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = n[u(x)]^{n-1} \cdot \frac{d}{dx}[u(x)]}}$$

$f(x) = 4(x^2+1)^{-1}$ aplicando la **regla de la cadena** para derivar

$$f'(x) = -4(x^2+3)^{-1-1}\frac{d}{dx}(x^2+3) == -4(x^2+3)^{-2}(2x) = -8x(x^2+3)^{-2} = \frac{-8x}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2+3)^2}$$

Hallemos de una vez la **segunda derivada**, aplicando la **derivada del cociente**

$$f''(x) = \frac{\frac{d}{dx}(-8x)\cdot(x^2+3)^2 - \frac{d}{dx}(x^2+3)^2\cdot(-8x)}{[(x^2+3)^2]^2} = \frac{(-8)\cdot(x^2+3)^2 - \cdot\, 2(x^2+3)\cdot(2x)(-8x)}{[x^2+3]^4}$$

$$f''(x) = \frac{-8\,\cancel{(x^2+3)}\;[(x^2+3)-4x^2]}{\cancel{[x^2+3]^4}} \text{ Factor común}$$

$$f''(x) = \frac{-8\;[3-3x^2]}{[x^2+3]^3} = \frac{24\,[x^2-1]}{[x^2+3]^3} \text{ Factor común}$$

$$f''(x) = \frac{24\,[x^2-1]}{[x^2+3]^3}$$

Así los **números críticos** se obtienen haciendo $f'(x) = 0$

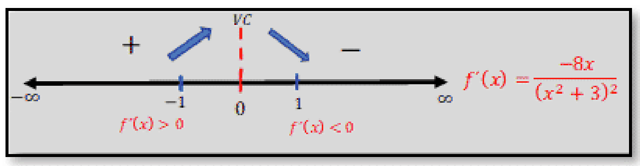
$$\frac{-8x}{(x^2+3)^2} = 0 \implies -8x = 0 \implies x = 0$$

El único **valor crítico** es: $x = 0$. Evaluando este valor en la función tenemos:

$$f(0) = \frac{4}{(0)^2+3} = \frac{4}{3}$$

Determinemos el signo de $f'(x)$ en un valor de x arbitrario, **antes y después** del valor **crítico** hallado

Figura 25. Criterio de la primera derivada e intervalos de crecimiento y decrecimiento



Fuente: Abello (2020)

En la figura observamos un solo **valor crítico**: $x = 0$

✓ Para $x < 0$, digamos $x = -1$, en la derivada:

$$f'(-1) = \frac{-8(-1)}{((-1)^2+3)^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} > 0 \text{ es positivo}$$

✓ Para $x > 2$, digamos $x = 1$, en la derivada:

$$f'(1) = \frac{-8(1)}{((1)^2+3)^2} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} < 0 \text{ es negativo}$$

- Aplicando el **criterio para las funciones crecientes o decrecientes** concluimos que:

✓ f es **creciente** en los intervalos: $(-\infty, 0)$

✓ f es **decreciente** en el intervalo: $(0, \infty)$

Finalmente aplicando el **criterio de la primera derivada**, concluimos que f tiene un **máximo relativo** en el punto $(0, 4/3)$ (en f' **hay cambio** de signo en el punto critico $x = 0$ de positivo a negativo).

- Para obtener los **intervalos de concavidad** hacemos $f''(x) = 0$

$$\frac{24\,[x^2-1]}{[x^2+3]^3} = 0 \;\;\Longrightarrow\; 24\,[x^2-1] = 0 \;\;\Longrightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\;\Longrightarrow\; x^2 = 1 \;\;\Longrightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

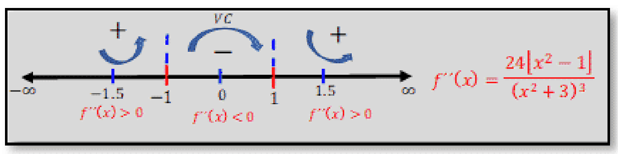
Así los valores de la función donde $f''(x) = 0$ son: $x = \pm 1$.
Evaluado estos valores en f tenemos

$$f(-1) = \frac{4}{(-1)^2+3} = \frac{4}{4} = 1 \quad y \;\; f(1) = \frac{4}{(1)^2+3} = \frac{4}{4} = 1$$

En estos valores es donde hay un **cambio de concavidad.**

Determinemos el signo de $f''(x)$ en un valor de x arbitrario, **antes y después** de los valores hallados, cuando $f''(x) = 0$

Figura 26. Criterio de concavidad



Fuente: Abello (2020)

✓ Para $x < -1$, digamos $x = -1.5$, en la segunda derivada:

$$f''(-1.5) = \frac{24\,[(-1.5)^2-1]}{[(-1.5)^2+3]^3} = \frac{30}{(21/4)^3} > 0 \;\; \text{es positivo}$$

✓ Para $-1 < x < 1$, digamos $x = 0$, en la segunda derivada:

$$f''(0) = \frac{24\,[(0)^2-1]}{[(0)^2+3]^3} = -\frac{24}{27} = -\frac{8}{9} < 0 \;\; \text{es negativo}$$

✓ Para $x > 1$, digamos $x = 1.5$, en la segunda derivada:

$$f''(1.5) = \frac{24\,[(1.5)^2-1]}{[(1.5)^2+3]^3} = \frac{30}{(21/4)^3} > 0 \;\; \text{es positivo}$$

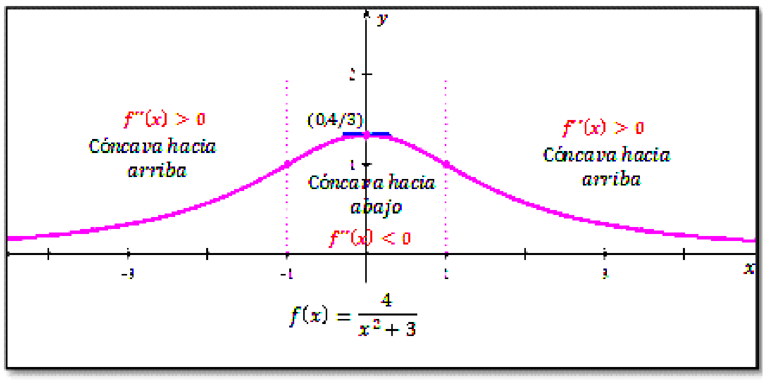
- Aplicando el **criterio de concavidad** concluimos que:

  ✓ f es **cóncava hacia arriba** en los intervalos: $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

  ✓ f es cóncava hacia abajo **en** el intervalo: $(-1,1)$

  Ya con toda la información anterior podemos hacer un gráfico con todo su análisis.

Figura 27. Criterio de concavidad

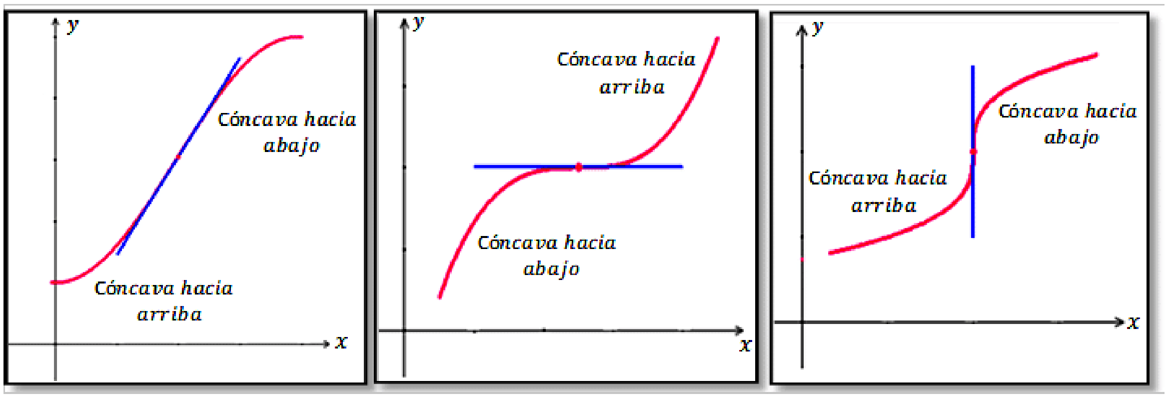


Fuente: Abello (2020)

Puntos de Inflexión

En la figura del **ejemplo anterior** muestra dos puntos *(-1, 1)* y *(1, 1)* en los que la **concavidad cambia de sentido**. Si en tales puntos **existe la tangente**, los llamamos **puntos de inflexión**. A continuación, mostraremos tres tipos de puntos de inflexión

Figura 28. Tipos de puntos de inflexión



Fuente: Abello (2020)

De. nición de Punto de Inflexión

Sea *f* una función cuya gráfica tiene **recta tangente** en *(c, f(c))*. Se dice que el punto *(c, f(c))* es un **punto de inflexión** si la concavidad de *f* cambia de ser hacia arriba a ser hacia abajo (o viceversa) en ese punto.

Nota:

- En la figura anterior se observa que en punto de inflexión la gráfica cruza su recta tangente.
- Si (c,f(c)) es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(c)=0$ o f'' no está definida en $x=c$

Otra **aplicación de la segunda derivada** es el criterio siguiente para determinar los valores extremos (máximos y mínimos) de una función. Es consecuencia del **criterio de concavidad.**

Criterio de la segunda derivada

Sea *f* una función tal que $f'(c)=0$ y tal que la segunda derivada de *f* existe en un intervalo abierto que contiene a *c*.

1. Si $f''(c)>0$, entonces *f(c)* es un **mínimo relativo.**

2. Si *f'' (c)<0*, entonces f(c) es un **máximo relativo.**

3. Si *f'' (c)=0*, entonces el **criterio no decide**. (se aplica criterio de la primera derivada)

Ejemplo.

Sea

$$f(x) = -3x^5 + 5x^3$$

Analizar la gráfica hallando dominio, interceptos, simetría, intervalos **abiertos en los que es creciente o decreciente**, valores extremos (máximo y mínimos si existen), intervalos de concavidad, puntos de inflexión y utilice el criterio de la segunda derivada para verificar los extremos (graficar).

- El **dominio** de la función son todos los números reales por ser una función polinómica.
- **Interceptos: corte con el eje x**: se hace $y = 0$, entonces:

$$-3x^5 + 5x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3(-3x^2 + 5) = 0 \text{ factor común}$$

$$x^3 = 0 \ \text{ o } \ -3x^2 + 5 = 0$$

$$x = 0 \ \text{ o } \ -3x^2 = -5 \Rightarrow x^2 = \frac{-5}{-3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{3} \approx \pm 1.29$$

La gráfica corta el eje x en los puntos $(0,0)$, $(\sqrt{15}/3, 0)$ y $(-\sqrt{15}/3, 0)$.

corte con el eje y: se hace $x = 0$, entonces

$$f(0) = -3(0)^5 + 5(0)^3 = 0$$

sí la gráfica **corta el eje y** en el punto $(0,0)$

- **Simetría**:

$$f(-x) = -3(-x)^5 + 5(-x)^3 = 3x^5 - 5x^3 = -(-3x^5 + 5x^3) = -f(x)$$

Como $f(-x) = -f(x)$, entonces la función es impar, **simétrico al origen.**

- Hallamos los valores **críticos** de la función, para ello derivamos a $f(x) = -3x^5 + 5x^3$. Veamos

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2$$

Hallemos de una vez la **segunda derivada**

$$f''(x) = -60x^3 + 30x$$

Así los **números críticos** se obtiene haciendo $f'(x) = 0$

$$-15x^4 + 15x^2 \implies 15x^2(1 - x^2) = 0 \text{ Factor común}$$
$$15x^2(1 - x)(1 + x) = 0 \text{ Diferencia de cuadrados}$$

Así los **números críticos** son: $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. Evaluando estos valores en la función tenemos

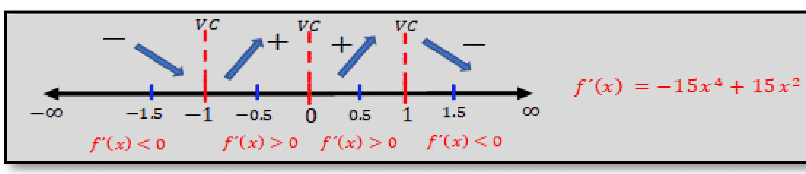
$f(0) = -3(0)^5 + 5(0)^3 = 0$

$f(1) = -3(1)^5 + 5(1)^3 = -3 + 5 = 2$

$f(-1) = -3(-1)^5 + 5(-1)^3 = 3 - 5 = -2$

- Determinemos el signo de $f'(x)$ en un valor de x arbitrario, **antes y después** de cada valor crítico hallado.

Figura 29. Criterio de la primera derivada e intervalos de crecimiento y decrecimiento



Fuente: Abello (2020)

En la figura observamos **valores críticos** $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$

- ✓ Para $x < -1$, digamos $x = -1.5$, en la derivada:

$$f'(-1.5) = -15(-1.5)^4 + 15(-1.5)^2 = -\frac{675}{16} < 0 \text{ es negativo}$$

- ✓ Para $-1 < x < 0$, digamos $x = -0.5$, en la derivada:

$$f'(-0.5) = -15(-0.5)^4 + 15(-0.5)^2 = \frac{45}{16} > 0 \text{ es positivo}$$

- ✓ Para $0 < x < 1$, digamos $x = 0.5$, en la derivada:

$$f'(0.5) = -15(0.5)^4 + 15(0.5)^4 = \frac{45}{16} > 0 \text{ es positivo}$$

- ✓ Para $x > 1$, digamos $x = 1.5$, en la derivada:

$$f'(1.5) = -15(1.5)^4 + 5(1.5)^2 = -\frac{675}{16} > 0 \text{ es negatvo}$$

- Aplicando el **criterio para las funciones crecientes o decrecientes** concluimos que:

  ✓ f es **creciente** en los intervalos: $(-1{,}1)$
  ✓ f es **decreciente** en el intervalo: $(-\infty,-1) \cup (1+\infty)$

  Finalmente aplicando el **criterio de la primera derivada**, concluimos que f tiene un **máximo relativo** en el punto $(1,2)$ (en f' **hay cambio** de signo en el punto crítico $x=1$ de positivo a negativo) y f presenta un mínimo relativo en el punto $(-1,-2)$ (en f' **hay cambio** de signo en el punto crítico $x=-1$ de negativo a positivo).

- Para obtener los **intervalos de concavidad** hacemos $f''(x)=0$
-

$$-60x^3+30x=0 \quad \Longrightarrow \quad 30x\,[1-2x^2]=0 \;\; \text{factor común}$$

$$30x=0 \quad \text{o} \quad 1-2x^2=0$$

$$x=0 \quad \text{o} \; -2x^2=-1 \;\Longrightarrow\; x^2=\frac{-1}{-2} \;\Longrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\approx \pm 0.71$$

Así los valores de la función donde $f''(x)=0$ son: $x=0,\; x=\sqrt{2}/2$ y $x=-\sqrt{2}/2$. Estos valores son los posibles valores de **inflexión.**

Evaluado estos valores en f tenemos

$$f(0)=-3(0)^5+5(0)^3=0$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5+5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=-3\frac{\sqrt{2^5}}{32}+5\frac{\sqrt{2^3}}{8}=-12\frac{\sqrt{2}}{32}+10\frac{\sqrt{2}}{8}=-\frac{3}{8}\sqrt{2}+\frac{5}{4}\sqrt{2}=\frac{7}{8}\sqrt{2}$$

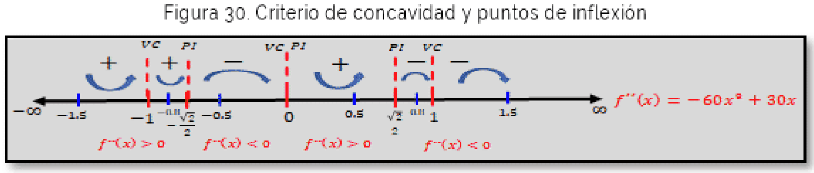
$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5+5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=3\frac{\sqrt{2^5}}{32}-5\frac{\sqrt{2^3}}{8}=12\frac{\sqrt{2}}{32}-10\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{3}{8}\sqrt{2}-\frac{5}{4}\sqrt{2}=-\frac{7}{8}\sqrt{2}$$

En estos valores hay un **cambio de concavidad (**ver figura 30) por lo tanto los puntos de inflexión son:

$$(0{,}0)\,,\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{7}{8}\sqrt{2}\right) \;\; y \;\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{7}{8}\sqrt{2}\right)$$

Determinemos el signo de $f''(x)$ en un valor de x arbitrario, **antes y después** de los valores hallados, cuando $f''(x)=0$

Figura 30. Criterio de concavidad y puntos de inflexión



Fuente: Abello (2020)

✓ Para $x < -1$, digamos $x = -1.5$, en la segunda derivada:

$$f''(-1.5) = -60(-1.5)^3 + 30(-1.5) = \frac{315}{2} > 0 \text{ es positivo}$$

✓ Para $-1 < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, digamos $x = -0.8$, en la segunda derivada:

$$f''(-0.8) = -60(-0.8)^3 + 30(-0.8) = \frac{168}{25} > 0 \text{ es positivo}$$

✓ Para $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$, digamos $x = -0.5$, en la segunda derivada

$$f''(-0.5) = -60(-0.5)^3 + 30(-0.5) = -\frac{15}{2} > 0 \text{ es negativo}$$

✓ Para $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, digamos $x = 0.5$, en la segunda derivada:

$$f''(0.5) = -60(0.5)^3 + 30(0.5) = \frac{15}{2} > 0 \text{ es positivo}$$

✓ Para $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$, digamos $x = 0.8$, en la segunda derivada:

$$f''(0.8) = -60(0.8)^3 + 30(0.8) = -\frac{168}{25} > 0 \text{ es negativo}$$

✓ Para $x > 1$, digamos $x = 1.5$, en la segunda derivada:

$$f''(1.5) = -60(1.5)^3 + 30(1.5) = -\frac{315}{2} > 0 \text{ es negativo}$$

- Aplicando el **criterio de concavidad** concluimos que:

  ✓ f es **cóncava hacia arriba** en los intervalos: $(-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

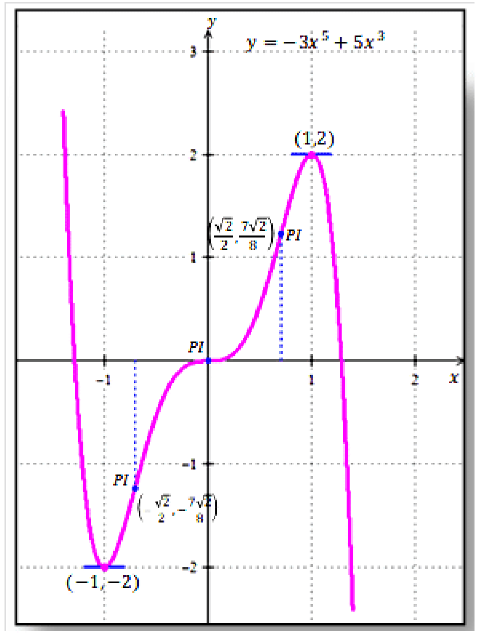
  ✓ f es cóncava hacia abajo **en** el intervalo: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$

- Aplicando el criterio de la segunda derivada para hallar los extremos. Evaluamos los puntos críticos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ en la segunda derivada

  $f''(-1) = -60(-1)^3 + 30(-1) = 60 - 30 = 30 > 0$ Mínimo relativo
  $f''(1) = -60(1)^3 + 30(1) = -60 + 30 = -30 < 0$ Máximo relativo
  $f''(0) = -60(0)^3 + 30(0) = 0$ El criterio no decide

Como el **criterio de la segunda derivada falla** en $(0,0)$, sabemos que cambia de signo de negativo a positivo en la segunda derivada, significa que ese punto es de inflexión.

Figura 31. Criterio de la primera y segunda derivada



Fuente: Abello (2020)

6 Problemas de Optimización en Ingenierías

De acuerdo con **Uribe**(1990), muchos problemas no solo de la matemática sino de otras ramas de la ciencia consiste en determinar el **máximo o mínimo** valor de cierta cantidad. Frecuentemente escuchamos expresiones como estas: la mayor ganancia, el menor costo, el articulo más barato, el menor tiempo empleado, la menor cantidad de material utilizado, el mayor volumen, la menor distancia. Tales problemas son de gran importancia práctica y se pueden resolver con la ayuda de la derivada y aplicando los conocimientos adquiridos en las unidades anteriores.

Recordemos que algunos de los **problemas** que se van a resolver requieren del conocimiento de las fórmulas geométricas como son las áreas y volúmenes de regiones planas y solidos respectivamente. Según Swokowski (1989).

Guía para Resolver Problemas Aplicados de Máximos y Mínimos

1. Leer cuidadosamente el problema varias veces y pensar en los hechos dados y en las cantidades desconocidas que se tratan de encontrar.

2. De ser posible, hacer un **croquis o un diagrama** que incluya los datos pertinentes introduciendo variables para las cantidades desconocidas. Las palabras como **qué, encontrar, cuánto, donde o cuando** suelen estar asociadas a las cantidades desconocidas.

3. Enunciar los hechos conocidos y las relaciones entre las variables.

4. Determinar de cuál de las variables se desea encontrar el máximo o el mínimo y expresar esta variable como una función de una de las otras variables.

5. Hallar los números críticos de la función obtenida en el paso e investigar si corresponden a máximos o mínimos.

6. Verificar si hay máximo o mínimo en la frontera del dominio de la función que obtuvo en el paso .

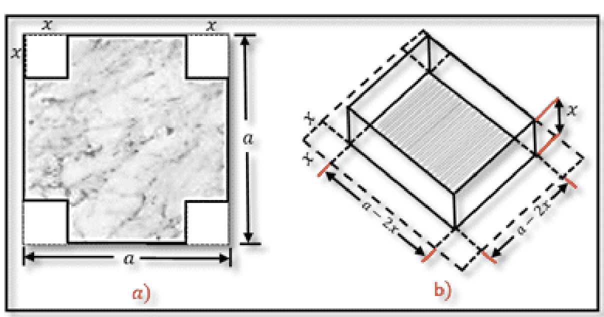
7. No desanimarse si no se puede resolver algún problema. Adquirir habilidad para resolver problemas aplicados, toma una gran cantidad de esfuerzos y práctica. ¡Hay que seguir intentando!

Ejemplo.

Con una **lámina cuadrada de hojalata** de a metros de lado, se hace una caja sin tapa cortando un pequeño cuadrado de dicho material en cada esquina y doblando los lados hacia arriba. ¿Qué tamaño ha de tener el cuadrado cortado en cada esquina para que la caja tenga el **mayor volumen posible**?

- Empezamos por trazar un **diagrama de la lámina cuadrada de hojalata**. (ver figura 32 a)), en donde: representamos el lado del cuadrado por $\boldsymbol{a}$ y por la letra $\boldsymbol{x}$ que denota la longitud del lado del cuadrado que se va a cortar en cada esquina. Ahora escribimos los datos conocidos (el tamaño del cuadrado) en los lugares apropiados de la figura.

Figura 32. Optimización



Fuente: Abello (2020)

- Después (paso 4), se ve que la cantidad cuyo **máximo hay que encontrar es el volumen V** de la caja que se formara doblando a lo largo de las líneas de trazos (figura 32 b)). Expresemos **V** como una función de la variable $\boldsymbol{x}$.

Tenemos que el volumen $\mathbf{V}$ de la caja esta dado por:

$$\mathrm{V} = \text{Area de la base } \times \text{altura} = (a-2x)^2 \cdot x$$

$$\mathbf{V} = (\boldsymbol{a} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{x} \quad \textbf{Funcion a máximizar} \quad (\mathbf{1})$$

Observe que $0 \leq x \leq a/2$ ($\boldsymbol{x}$ debe ser positivo, para que el problema tenga sentido, además $\boldsymbol{x}$ debe ser menor que $a/2$, porque, si es igual a este valor, el lado del cuadrado seria cero y no se tendria caja en este caso), O sea el máximo se da en un punto interior del intervalo de $[0, a/2]$.

- Hallemos ahora los **números críticos** para probar si son máximos o mínimos (paso 5). Derivando a (1) con respecto a $\boldsymbol{x}$, (resolviendo el producto notable de $(\mathbf{1})$ y multiplicando).

$$\mathbf{V} = (a-2x)^2 \cdot x = (a^2 - 4ax + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{x}) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx} = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \implies (a-6x)(a-2x) = 0 \ \text{ Se factorizar el trinomio}$$

Entonces los números críticos son $x = a/6$ o $x = a/2$. De estos valores solo tomo $x = a/6$, ya que esta en el interior del intervalo $[0, a/2]$.

- Por el **criterio de la segunda** derivada tenemos.

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} = 24x - 8a$$

evaluando el valor critico en la segunda derivada se tiene:

$$\mathbf{V}''(a/6) = 24(a/6) - 8a = 4a - 8a = -4a < 0$$

Por lo tanto, en $\mathbf{V}$ ocurre un **máximo** cuando $x = a/6$. Cada cuadrado de la esquina debe tener unas dimensiones de $a/6 \times a/6$ para producir una caja de volumen máximo. Además, la dimensión del lado de la caja de base cuadrada es de $a - 2(a/6) = \frac{2}{3}a$.

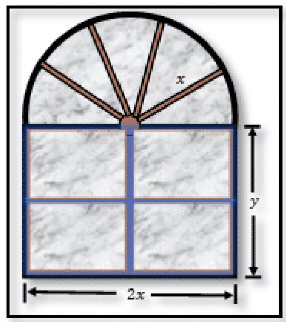
Entonces su **volumen máximo** es de

$$\mathbf{V} = \frac{2}{3}a \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{6}a = \frac{2}{27}a^3$$

Ejemplo.

Una **ventana normanda** es un rectángulo con un semicírculo arriba de este. Encuentre las dimensiones para que la cantidad de luz que pase por ella sea máxima, si su perímetro mide $10\ m$.

Figura 33. Optimización (ventana normanda)



Fuente: Abello (2020)

Empezamos por trazar un **diagrama de la ventana normanda** (ver figura 33), en donde, representamos las **dimensiones de la ventana** con mayor área así:

La base o ancho del rectángulo por: $2x$

Su altura por: x

Radio del semicírculo: x

$\boxed{\textit{Perímetro del circulo} = 2\pi r}$

Como el perímetro $\mathbf{P}$ de la ventana es de $10\ m$, tenemos

$$\mathbf{P} = \textbf{perímetro del rectángulo} + \textbf{perímetro del semícirculo}$$

$$\mathbf{P} = 2x + 2y + \pi x = 10 \quad (1)$$

Después (paso 4), se tiene que la máxima cantidad de luz que entra por la ventana depende de su área $\mathbf{A}$. Expresemos $\mathbf{A}$ como una función de la variable $\boldsymbol{x}$.

$$\mathbf{A} = \textbf{Área de rectángulo} + \textbf{área del semicírculo}$$

$$\mathbf{A} = 2xy + 1/2\ \pi x\text{^}2 \quad \textbf{Función a máximizar} \quad (2)$$

Como la función a maximizar (2) depende de dos variables, de (1), despejamos y y lo sustituimos en (2), de tal manera que la función área quede definida en una variable. Entonces de (1)

$$2x + 2y + \pi x = 10 \quad (1)$$

$$y = 1/2\,(10 - 2x - \pi x) \quad (3)$$

$20x - 4x^2 - \pi x^2 = 0$ Factor común

$x(20 - 4x - \pi x) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 & \text{o} \\ 20 - 4x - \pi x = 0 \end{cases}$

$20 = 4x + \pi x$

Ahora en (2)

$$\mathbf{A} = 2xy + 1/2\,\pi x\text{^}2 = 2x \cdot 1/2\,(10 - 2x - \pi x) \ + 1/2\,\pi x\text{^}2 = 1/2\,[2x(10 - 2x - \pi x) + \pi x\text{^}2\,] \ \ \textbf{Factor común}$$

$$\mathbf{A} = 1/2\,(20x - 4x\text{^}2 - 2\pi x\text{^}2 + \pi x\text{^}2\,) = 1/2\,(20x - 4x\text{^}2 - \pi x\text{^}2\,)$$

$$\mathbf{A = 1/2\,(20x - 4x\text{^}2 - \pi x\text{^}2\,)} \ \ \textbf{Funcion a máximizar} \quad (4)$$

Observe que $0 \leq x \leq 20/(\pi + 4)$ ($\boldsymbol{x}$ debe ser positivo, para que el problema tenga sentido, además $\boldsymbol{x}$ debe ser menor que $20/(\pi + 4)$, porque, si es igual a este valor, el área seria cero y no se tendria área en este caso), el máximo se da en un punto interior del intervalo de $[0, 20/(\pi + 4)]$.

Hallemos ahora los **números críticos** para probar si son máximos o mínimos (paso 5). Derivando a (4) con respecto a $\boldsymbol{x}$

$$\mathbf{A} = 1/2\,(20x - 4x\text{^}2 - \pi x\text{^}2\,)$$

$$dA/dx = 1/2(20 - 8x - 2\pi x) = 0$$

$$1/2\,(20 - 8x - 2\pi x) = 0 \ \implies \ 20 = 8x + 2\pi x \implies \ x(2\pi + 8) = 20 \ \ \textbf{Factor común}$$

$$x = 20/((2\pi + 8)\,) = \frac{20}{2(\pi + 4)} = \frac{10}{\pi + 4}$$

Por lo tanto, el único valor crítico es

$$x = \frac{10}{\pi + 4}$$

y este valor pertenece al intervalo $[0, 20/(\pi + 4)]$

Por el **criterio de la segunda** derivada tenemos.

$$\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{1}{2}(-8 - 2\pi) = -4 - \pi$$

evaluando el valor critico en la segunda derivada se tiene:

$$A''\left(\frac{}{\pi+4}\right) = -4 - \pi < 0$$

Por lo tanto, en A ocurre un **máximo** cuando $x = 10/(\pi + 4)$.

Reemplazando este valor de x en (3), se tiene que:

$$y = \frac{1}{2}(10 - 2x - \pi x) = \frac{1}{2}\left[10 - 2(\pi\ 4) - \pi(/4)\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[10 - \frac{}{\pi + 4} - \frac{10\pi}{\pi + 4}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{10(\pi + 4) - 20 - 10\pi}{\pi + 4}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{10\pi + 40 - 20 - 10\pi}{\pi + 4}\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{20}{\pi + 4}\right] = \frac{10}{\pi + 4}$$

Finalmente. las **dimensiones que debe tener La ventana normanda** para que la cantidad de luz que pase por ella sea maximaes:

Ancho de la base rectangular:

$$2x = 2 \cdot \frac{10}{\pi+4} = \frac{20}{\pi+4}$$

Altura:

$$y = \frac{10}{\pi+4}$$

Radio del semicirculo

$$x = \frac{10}{\pi + 4}$$

Resumen de la Temática

Valores máximos y mínimos de una función

Extremos de una función en un intervalo

Si f esta definido en un intervalo cerrado y conteniendo a c, entonces

a) $f(c)$ es el mínimo de f en I si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en I.

b) $f(c)$ es el máximo de f en I si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en I.

Extremos relativos de una función

a) Una funcion f alcanza un **máximo relativo** en un punto c de un intervalo (a, b) si para todo $x \in (a, b)$, $f(c) \geq f(x)$

b) Una funcion f alcanza un **mínimo relativo** en un punto c de un intervalo (a, b), si para todo $x \in (a, b)$, $f(c) \leq f(x)$

Número crítico: Si f esta definida en c, se dirá que c es un número crítico de f' si (c)=0 o si f' no está esta definida en c.

Resumen de la Temática

Teorema de Rolle y del valor medio

Teorema de Rolle

Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), con $f(a) = f(b)$ =0, entonces, existe por lo menos un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0$$

Teorema del valor medio

Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), entonces, existe por lo menos un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Criterio para funciones crecientes o decrecientes

Sea f es una función diferenciable en un intervalo (a, b) (continua)

1) Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es **creciente** en (a, b).

2) Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es **decreciente** en (a, b).

3) Si $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b), entonces f es **constante** en (a, b).

Resumen de la Temática

Criterio de la primera derivada

Sea c un **numero crítico** de una función f continua en un intervalo abierto I que contiene a c.
Si f es derivable en el intervalo, excepto quizá en c, $f(c)$ puede clasificarse como sigue

Si $f'(x)$ cambia de **negativo a positivo** en c, $f'(c)$ es un **mínimo relativo** de f.
Si $f'(x)$ cambia de **positivo a negativo** en c, $f'(c)$ es un **máximo relativo** de f.
Si $f'(x)$ **no cambia** de signo en c, $f'(c)$ no es máximo ni mínimo relativo.

Uso de la segunda derivada (1/2)

Criterio de Concavidad

Sea f una función cuya derivada existe en un intervalo abierto I

Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, la gráfica de f es **cóncava hacia arriba**.
Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, la gráfica de f es **cóncava hacia abajo**.
Si $f''(x) = 0$ para todo x en I, f es lineal es decir **no presenta concavidad**.

Punto de inflexión

Sea f una funcion cuya gráfica tiene recta tangente en $(c, f(c))$. Se dice que el punto $(c, f(c))$ es un punto de inflexión si la concavidad de f cambia de ser hacia arriba a ser hacia abajo (o viceversa) en ese punto.

Estimado estudiante. Si está observando este mensaje, es porque acaba de finalizar el recorrido por las lecturas y los recursos de esta sección. Por tanto, para salir de aquí, y continuar con el desarrollo del curso, vaya a la parte superior y dé clic en:

Salir de la actividad

Glosario

- **Cóncava hacia abajo:** se dice que la función *f* es cóncava hacia abajo en un punto, cuando la recta tangente a la curva en el punto se encuentra por encima de la gráfica de la función.
- **Cóncava hacia arriba:** se dice que la función *f* es cóncava hacia abajo en un punto, cuando la recta tangente a la curva en el punto se encuentra por debajo de la gráfica de la función.
- **Extremos:** valores máximos y mínimos de una función.
- **Función creciente:** aquella en la cual, al aumentar el valor de la variable independiente, aumenta el valor de la variable dependiente.
- **Función decreciente:** aquella en la cual, al aumentar el valor de la variable independiente, disminuye el valor de la variable dependiente.
- **Optimización**: proceso mediante el cual se determinan los valores máximos y mínimos de diversas situaciones matemáticas
- **Punto de inflexión:** punto en el cual la función cambia de concavidad.

Referencias

- Larson, Hostetler. (1989). Matemáticas Nivel 6. Editorial McGraw-Hill Latinoamericana S.A

- James, Stewart. (2001). Cálculo de una variable trascendentes tempranas. Thomson Editores, S.A

- Larson, Hostetler y Edwards. (1995). Cálculo Volumen 1. McGraw-Hill
  Julio A. y Uribe C. (1990) Matemática una propuesta curricular. Bedout Editores SA

- Earl W. Swokowski. (1989). Cálculo con Geometría Analítica. Grupo editorial Iberoamérica S.A

UNIDAD DE VIRTUALIZACIÓN
unidaddevirtualizacion@uniquindio.edu.co
Tel: (57) 6 7 35 9300 Ext 400
Universidad del Quindío
Carrera 15 Calle 12 Norte
Bloque de Ciencias Básicas - Primer Piso
Armenia, Quindío - Colombia